书中所有代码读者均可到 http://www.tdpress.com/zyzx/tsscflwj下载使用

Java

常用算法手册

The Classic Algorithm Fundamental of Program Language Java

算法是一切程序设计的**基础**和**灵魂**，更是一位程序员水平高低的**集中体现**。

赵志云 衡友跃 编著

涵盖广泛 精炼的理论讲述搭配大量经典算法示例，学习查询兼而有之。

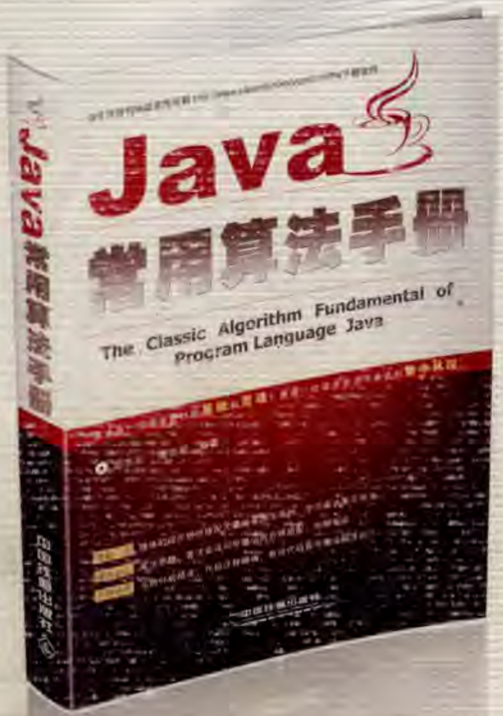
阐述到位 算法思想、算法实现和完整示例合理搭配，相辅相成。

示例完善 示例分析精准，代码注释精确，每段代码皆可通过编译执行。

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM



Java 常用算法手册

信息社会进入云计算时代，最为明显的特征就是“各种云终端+云服务器应用”组合而成的；不管是编写服务器端的程序，还是编写PC、平板电脑、手机等云终端上的应用程序，采用Java基本上都是最常见的选择。而一个应用程序往往由编程语言、数据结构和算法来组成。在这其中，算法是整个程序设计的核心。

阅读完本书，读者如有提高和学习其他算法相关技术的想法，可到读者服务网站：http://www.rzchina.net上阅读实际工作中可能会用到的其他算法技术的资料。同时，我们还会在这个网站上提供辅助的教学资料，供读者下载或者在线学习。

算法是一切程序设计的**基础**和**灵魂**，更是一位程序员水平高低的**集中体现**。

责任编辑：荆　波　**封面设计**：正品堂·付　巍　**封面制作**：郑少云　**上架建议**：计算机/程序设计/Java

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE
地址：北京市西城区右安门西街8号
邮编：100054
网址：http://www.tdpress.com

ISBN 978-7-113-14366-4
9 787113 143664 >
定价：59.00元

内 容 简 介

现代的设计任务大多通过计算机编程来完成，而算法起到了至关重要的作用。可以毫不夸张地说，算法是一切程序设计的灵魂和基础。选择合理的算法，可以起到事半功倍的效果。

本书分三篇，共13章，分别介绍了算法基础、算法应用和算法面试题。首先介绍了算法概述，然后重点分析了数据结构和基本算法思想；接着，详细讲解了算法在排序、查找、数学计算、数论、历史趣题、游戏、密码学等领域中的应用；最后，列举了算法的一些常见面试题。

书中知识点覆盖全面，结构安排紧凑，讲解详细，实例丰富。全书对每一个知识点都给出了相应的算法及应用实例，虽然这些例子都是以Java语言来编写的，但是这些算法并不局限于Java语言。如果读者采用其他的编程语言，例如C++、C、C#等，只要根据其语法格式进行适当的修改便可以了。

本书旨在帮助Java语言初级程序员深入了解Java算法思想，提升其语言代码编程能力，还可以作为大中专院校学生学习数据结构和算法的参考书，也可为教师授课提供素材，同时还可以作为具有一定编程经验的程序员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

Java常用算法手册 / 赵志云，衡友跃编著. -- 北京
：中国铁道出版社，2012.5
ISBN 978-7-113-14366-4

Ⅰ. ①J… Ⅱ. ①赵… ②衡… Ⅲ. ①JAVA语言一程序设计 Ⅳ. ①TP312

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第034739号

书　　名：Java常用算法手册
作　　者：赵志云　衡友跃　编著

策划编辑：荆　波　　**读者服务热线：**010-63560056
责任编辑：荆　波　　**编辑助理：**张　丹
责任印制：赵星辰

出版发行：中国铁道出版社（北京市西城区右安门西街8号　　**邮政编码：**100054）
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2012年5月第1版　　2012年5月第1次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张：**27　**字数：**656千
书　　号：ISBN 978-7-113-14366-4
定　　价：59.00元

版权所有　侵权必究

凡购买铁道版图书，如有印制质量问题，请与本社发行部联系调换。

前 言 Foreword

信息社会进入云计算时代，最为明显的特征就是“各种云终端+云服务器应用的组合而。不管是编写服务器端的程序，还是编写 PC、平板电脑、手机等云终端上的应用程序，采用 Java 基本上都是最常见的选择。而一个应用程序往往由编程语言、数据结构和算法来组成。其中，算法是整个程序设计的核心。算法代表着求解具体问题的手段和方法，可以毫不夸张地说，算法是一切程序设计的灵魂和基础。选择合理的算法，可以起到事半功倍的效果。因此，对于程序员来说，学习和掌握算法成为重中之重。同时，各大公司招聘 Java 程序员时，除基本语法之外，算法的掌握程度也是考核的重点方面。

本书特色

为了保证读者掌握算法这个程序设计的核心技术，我们一开始就为本书规划了一些特色，以保证它的质量和生命力。和其他书籍相比，本书有如下优点：

（1）本书由浅入深，循序渐进地带领读者逐步深入学习算法和数据结构的知识。

（2）本书不仅详细介绍了算法的基础知识和应用，还对常用的加密解密和数据压缩等高级算法编程技术进行了详细的讲解。

（3）本书在讲解每个知识点的同时，均给出了相应的算法原理、算法实现，同时还给出了完整的实例，每个实例都可以运行，使得读者可以快速掌握对应知识点如何应用在程序设计中。

（4）本书在介绍各个知识点的时候，尽量结合历史背景并给出了问题的完整分析，使读者可以了解问题的来龙去脉，避免了代码类书籍的枯燥乏味。

（5）本书对每一个实例的程序代码都进行了详细的注释和分析，并给出了运行结果，使得读者更加容易理解。

（6）本书中的所有代码均采用应用较为广泛的 Java 语言进行编写。但是这些算法本身并不仅局限于 Java 语言，读者如果采用 C++、C、C#、VB 等其他编程语言，只需按照对应的语法格式进行少量的修改便可以使用。

本书的内容

本书以实用性、系统性、完整性和前沿性为重点，详细介绍了算法的基本思想和在不同领域的应用实例。本书分为三篇，共 13 章内容。

第一篇　算法基础篇

本篇共 3 章，详细介绍了算法和数据结构的相关知识。

第 1 章　算法概述，本篇介绍了什么是算法，以及算法的发展、分类、算法的基本概念、算法的表示以及性能评价等。同时，本章还通过一个实例分析算法的编写、编译执行等。最后，本章还介绍了一些算法的最新进展，作为读者扩展知识面。

第 2 章为数据结构，首先介绍了数据结构的基本概念，然后重点介绍了顺序表结构、链表结构、栈结构、队列结构、树结构和图结构的实现。

第 3 章为基本算法思想，介绍了穷举算法思想、递推算法思想、递归算法思想、分治算法思想和概率算法思想的原理和应用。

第二篇　算法应用篇

本篇共 9 章，详细讲解了算法在排序、查找、数学计算、数论、历史趣题和游戏中的应用。

第 4 章为排序算法，详细介绍各种排序算法及其应用实例。

第 5 章为查找算法，详细讲解了各种查找算法及其应用实例。

第 6 章为基本数学问题，介绍了多项式计算、随机数生成、复数运算、阶乘、计算圆周率、矩阵运算和方程求解中的算法，并通过完整的例子来演示了算法的应用。

第 7 章为数据结构问题，介绍与数据结构相关的一些典型问题，包括动态数组排序、约瑟夫环、最短总距离、最短路径和括号匹配等。

第 8 章为数论问题，首先介绍了数论的基本知识，然后介绍了初等数论中的一些基本数据的计算算法。

第 9 章为算法经典趣题，介绍了一些历史上非常有名的问题、智力趣题等。这些经典趣题是历史上累积的算法财富，通过这些有趣的问题，可以提高读者的编程能力和学习算法的兴趣。

第 10 章为游戏中的算法，讲解了一些常用游戏中的算法，包括洗扑克牌算法、取火柴游戏算法、十点半算法以及生命游戏算法。

第 11 章为密码学算法，首先介绍了密码学的基本知识，然后详细介绍了换位加密算法、替换加密算法、位加密算法和一次一密加密算法。

第 12 章为压缩与解压缩算法，首先介绍了数据压缩的基本知识，然后重点介绍了 LZW 压缩算法和解压缩算法的实现，最后结合实例讲解了压缩算法的应用。

第三篇　算法面试篇

本篇共 1 章，详细讲解了常见面试中的算法。

本书结构紧凑，知识点涉及全面，内容翔实，案例丰富。由于本书内容较多，编写时间较仓促，书中如有遗漏或不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见，发便改进。

适合的读者

- 大专院校相关专业的学生及教师；
- 系统开发人员；
- 程序设计初学者；
- Java 程序员；
- 计算机程序设计爱好者。

阅读完本书，读者若需要进一步提高和学习其他算法的相关技术，也可以到读者服务网站：http://www.rzchina.net/forum.php 上阅读在实际工作中可能会用到的其他算法技术资料。同时，我们还会在这个网站上提供辅助的教学资料，供读者下载或者在线学习。

编　者

2012 年 3 月

目　录 Contents

第 1 篇　算法基础篇

第 1 章　算法概述

1.1　什么是算法 1
1.2　算法的发展历史 2
1.3　算法的分类 3
1.4　算法相关概念的区别 3
　1.4.1　算法与公式的关系 4
　1.4.2　算法与程序的关系 4
　1.4.3　算法与数据结构的关系 4
1.5　算法的表示 4
　1.5.1　自然语言表示 5
　1.5.2　流程图表示 5
　1.5.3　N-S 图表示 6
　1.5.4　伪代码表示 7
1.6　算法的性能评价 7
　1.6.1　时间复杂度 8
　1.6.2　空间复杂度 8
1.7　算法实例 8
　1.7.1　查找数字 8
　1.7.2　创建项目 10
　1.7.3　编译执行 12
1.8　算法的新进展 13
1.9　小结 14

第 2 章　数据结构

2.1　数据结构概述 15
　2.1.1　什么是数据结构 15
　2.1.2　数据结构中的基本概念 16
　2.1.3　数据结构的内容 16
　2.1.4　数据结构的分类 18
　2.1.5　数据结构的几种存储方式 18
　2.1.6　数据类型 19
　2.1.7　常用的数据结构 20
　2.1.8　选择合适的数据结构解决实际问题 21
2.2　线性表 21
　2.2.1　什么是线性表 21
　2.2.2　线性表的基本运算 22
2.3　顺序表结构 23
　2.3.1　准备数据 23
　2.3.2　初始化顺序表 24
　2.3.3　计算顺序表长度 24
　2.3.4　插入结点 24
　2.3.5　追加结点 25
　2.3.6　删除结点 25
　2.3.7　查找结点 25
　2.3.8　显示所有结点 26
　2.3.9　顺序表操作实例 26
2.4　链表结构 30
　2.4.1　什么是链表结构 30
　2.4.2　准备数据 31
　2.4.3　追加结点 31
　2.4.4　插入头结点 32
　2.4.5　查找结点 33
　2.4.6　插入结点 34
　2.4.7　删除结点 35
　2.4.8　计算链表长度 35
　2.4.9　显示所有结点 36
　2.4.10　链表操作实例 36
2.5　栈结构 41
　2.5.1　什么是栈结构 41
　2.5.2　准备数据 41

2.5.3 初始化栈结构 42
2.5.4 判断空栈 42
2.5.5 判断满栈 43
2.5.6 清空栈 43
2.5.7 释放空间 43
2.5.8 入栈 43
2.5.9 出栈 44
2.5.10 读结点数据 44
2.5.11 栈结构操作实例 45
2.6 队列结构 47
2.6.1 什么是队列结构 48
2.6.2 准备数据 48
2.6.3 初始化队列结构 49
2.6.4 判断空队列 49
2.6.5 判断满队列 49
2.6.6 清空队列 50
2.6.7 释放空间 50
2.6.8 入队列 50
2.6.9 出队列 51
2.6.10 读结点数据 51
2.6.11 计算队列长度 52
2.6.12 队列结构操作实例 52
2.7 树结构 55
2.7.1 什么是树结构 56
2.7.2 树的基本概念 56
2.7.3 二叉树 57
2.7.4 准备数据 60
2.7.5 初始化二叉树 61
2.7.6 添加结点 61
2.7.7 查找结点 63
2.7.8 获取左子树 63
2.7.9 获取右子树 64
2.7.10 判断空树 64
2.7.11 计算二叉树深度 64
2.7.12 清空二叉树 65
2.7.13 显示结点数据 65
2.7.14 遍历二叉树 65
2.7.15 树结构操作实例 67
2.8 图结构 74
2.8.1 什么是图结构 74
2.8.2 图的基本概念 75
2.8.3 准备数据 79
2.8.4 创建图 81
2.8.5 清空图 82
2.8.6 显示图 82
2.8.7 遍历图 83
2.8.8 图结构操作实例 84
2.9 小结 87

第 3 章 基本算法思想

3.1 常用算法思想概述 88
3.2 穷举算法思想 88
3.2.1 穷举算法基本思想 89
3.2.2 穷举算法实例 89
3.3 递推算法思想 90
3.3.1 递推算法基本思想 91
3.3.2 递推算法实例 91
3.4 递归算法思想 92
3.4.1 递归算法基本思想 93
3.4.2 递归算法实例 93
3.5 分治算法思想 94
3.5.1 分治算法基本思想 94
3.5.2 分治算法实例 95
3.6 概率算法思想 98
3.6.1 概率算法基本思想 99
3.6.2 概率算法实例 99
3.7 小结 101

第 2 篇 算法应用篇

第 4 章 排序算法

4.1 排序算法概述 102
4.2 冒泡排序法 103
4.2.1 冒泡排序算法 103
4.2.2 冒泡排序算法实例 104

4.3 选择排序法 106
4.3.1 选择排序算法 106
4.3.2 选择排序算法实例 107
4.4 插入排序法 109
4.4.1 插入排序算法 109
4.4.2 插入排序算法实例 111
4.5 Shell 排序法 112
4.5.1 Shell 排序算法 112
4.5.2 Shell 排序算法实例 113
4.6 快速排序法 115
4.6.1 快速排序算法 115
4.6.2 快速排序算法实例 117
4.7 堆排序法 119
4.7.1 堆排序算法 119
4.7.2 堆排序算法实例 123
4.8 合并排序法 125
4.8.1 合并排序算法 126
4.8.2 合并排序算法实例 128
4.9 排序算法的效率 131
4.10 排序算法的其他应用 132
4.10.1 反序排序 132
4.10.2 字符串数组的排序 134
4.10.3 字符串的排序 137
4.11 小结 139

第 5 章　查找算法

5.1 查找算法概述 140
5.2 顺序查找 141
5.2.1 顺序查找算法 141
5.2.2 顺序查找操作实例 141
5.3 折半查找 143
5.3.1 折半查找算法 143
5.3.2 折半查找操作实例 145
5.4 数据结构中的查找算法 147
5.4.1 顺序表结构中的查找算法 148
5.4.2 链表结构中的查找算法 151
5.4.3 树结构中的查找算法 154
5.4.4 图结构中的查找算法 155
5.5 小结 156

第 6 章　基本数学问题

6.1 判断闰年 157
6.2 多项式计算 159
6.2.1 一维多项式求值 159
6.2.2 二维多项式求值 161
6.2.3 多项式乘法 163
6.2.4 多项式除法 164
6.3 随机数生成算法 167
6.3.1 Java 语言中的随机方法 167
6.3.2 [0，1]之间均匀分布的随机数算法 169
6.3.3 产生任意范围的随机数 170
6.3.4 [m，n]之间均匀分布的随机整数算法 171
6.3.5 正态分布的随机数生成算法. 173
6.4 复数运算 174
6.4.1 简单的复数运算 175
6.4.2 复数的幂运算 177
6.4.3 复指数运算 178
6.4.4 复对数运算 180
6.4.5 复正弦运算 181
6.4.6 复余弦运算 182
6.5 阶乘 183
6.5.1 使用循环来计算阶乘 183
6.5.2 使用递归来计算阶乘 184
6.6 计算 π 的近似值 185
6.6.1 割圆术 186
6.6.2 蒙特卡罗算法 189
6.6.3 级数公式 191
6.7 矩阵运算 193
6.7.1 矩阵加法 193
6.7.2 矩阵减法 195
6.7.3 矩阵乘法 196
6.8 方程求解 198
6.8.1 线性方程求解——高斯消元法 198
6.8.2 非线性方程求解——二分法 203

6.8.3 非线性方程求解——牛顿迭代法 205
6.9 小结 208

第 7 章 数据结构问题

7.1 动态数组排序 209
7.1.1 动态数组的存储和排序 209
7.1.2 动态数组排序实例 210
7.2 约瑟夫环 212
7.2.1 简单约瑟夫环算法 213
7.2.2 简单约瑟夫环求解 214
7.2.3 复杂约瑟夫环算法 216
7.2.4 复杂约瑟夫环求解 217
7.3 城市之间的最短总距离 220
7.3.1 最短总距离算法 220
7.3.2 最短总距离求解 222
7.4 最短路径 227
7.4.1 最短路径算法 227
7.4.2 最短路径求解 229
7.5 括号匹配 234
7.5.1 括号匹配算法 235
7.5.2 括号匹配求解 236
7.6 小结 239

第 8 章 数论问题

8.1 数论概述 240
8.1.1 数论概述 240
8.1.2 数论的分类 241
8.1.3 初等数论 242
8.1.4 本章用到的基本概念 242
8.2 完全数 243
8.2.1 什么是完全数 243
8.2.2 计算完全数算法 244
8.3 亲密数 246
8.3.1 什么是亲密数 246
8.3.2 计算亲密数算法 246
8.4 水仙花数 249
8.4.1 什么是水仙花数 249
8.4.2 计算水仙花数算法 250
8.5 自守数 252
8.5.1 什么是自守数 252
8.5.2 计算自守数算法 253
8.6 最大公约数 257
8.6.1 计算最大公约数算法——辗转相除法 257
8.6.2 计算最大公约数算法——Stein 算法 258
8.6.3 计算最大公约数示例 259
8.7 最小公倍数 260
8.8 素数 262
8.8.1 什么是素数 262
8.8.2 计算素数算法 262
8.9 回文素数 264
8.9.1 什么是回文素数 264
8.9.2 计算回文素数算法 264
8.10 平方回文数 267
8.10.1 什么是平方回文数 267
8.10.2 计算平方回文数算法 267
8.11 分解质因数 269
8.12 小结 271

第 9 章 算法经典趣题

9.1 百钱买百鸡 272
9.1.1 百钱买百鸡算法 272
9.1.2 百钱买百鸡求解 273
9.2 五家共井 274
9.2.1 五家共井算法 274
9.2.2 五家共井求解 275
9.3 鸡兔同笼 277
9.3.1 鸡兔同笼算法 277
9.3.2 鸡兔同笼求解 277
9.4 猴子吃桃 278
9.4.1 猴子吃桃算法 278
9.4.2 猴子吃桃求解 279
9.5 舍罕王赏麦 280
9.5.1 舍罕王赏麦问题 280
9.5.2 舍罕王赏麦求解 281
9.6 汉诺塔 282

9.6.1 汉诺塔算法 282
9.6.2 汉诺塔求解 284
9.7 窃贼问题 285
9.7.1 窃贼问题算法 285
9.7.2 窃贼问题求解 287
9.8 马踏棋盘 290
9.8.1 马踏棋盘算法 290
9.8.2 马踏棋盘求解 291
9.9 八皇后问题 294
9.9.1 八皇后问题算法 294
9.9.2 八皇后问题求解 295
9.10 寻找假银币 297
9.10.1 寻找假银币算法 297
9.10.2 寻找假银币求解 299
9.11 青蛙过河 301
9.11.1 青蛙过河算法 302
9.11.2 青蛙过河求解 303
9.12 三色旗 306
9.12.1 三色旗算法 306
9.12.2 三色旗求解 308
9.13 渔父捕鱼 310
9.13.1 渔父捕鱼算法 310
9.13.2 渔父捕鱼求解 310
9.14 爱因斯坦的阶梯 311
9.14.1 爱因斯坦的阶梯算法 312
9.14.2 爱因斯坦的阶梯求解 312
9.15 兔子产仔 313
9.15.1 兔子产仔算法 313
9.15.2 兔子产仔求解 314
9.16 常胜将军 315
9.16.1 常胜将军算法 315
9.16.2 常胜将军求解 316
9.17 新郎和新娘 318
9.17.1 新郎和新娘算法 318
9.17.2 新郎和新娘求解 319
9.18 三色球 320
9.18.1 三色球算法 320
9.18.2 三色球求解 321
9.19 小结 322

第 10 章 游戏中的算法

10.1 洗扑克牌算法 323
10.1.1 洗扑克牌算法 323
10.1.2 洗扑克牌实例 324
10.2 取火柴游戏算法 327
10.2.1 取火柴游戏算法 327
10.2.2 取火柴游戏实例 328
10.3 10 点半算法 330
10.3.1 10 点半算法 330
10.3.2 10 点半游戏实例 335
10.4 生命游戏 342
10.4.1 生命游戏的原理 342
10.4.2 生命游戏的算法 343
10.4.3 生命游戏实例 344
10.5 小结 349

第 11 章 密码学概述

11.1 密码学概述 350
11.1.1 密码学的发展 350
11.1.2 密码学的基本概念 351
11.1.3 柯克霍夫斯原则 352
11.1.4 经典密码学算法 352
11.2 换位加密解密算法 353
11.2.1 换位加密解密算法 353
11.2.2 换位加密解密算法实例 356
11.3 替换加密解密算法 359
11.3.1 替换加密解密算法 359
11.3.2 替换加密解密算法实例 360
11.4 位加密解密算法 363
11.4.1 位加密解密算法 363
11.4.2 位加密解密算法实例 364
11.5 一次一密加密解密算法 366
11.5.1 一次一密加密解密算法 366
11.5.2 一次一密加密解密算法实例 367
11.6 小结 369

第 12 章 压缩与解压缩算法

12.1 压缩与解压缩概述......370
12.1.1 压缩与解压缩分类......370
12.1.2 典型的压缩解压缩算法......370
12.2 压缩算法......371
12.3 解压缩算法......374
12.4 压缩解压缩实例......376
12.5 小结......384

第 3 篇 算法面试篇

第 13 章 算法面试题

13.1 基础算法......385
13.1.1 字符串匹配......385
13.1.2 哥德巴赫猜想的近似证明......388
13.1.3 将一个正整数分解质因数......389
13.1.4 怎样实现金额转换......391
13.1.5 数字排列......396
13.1.6 数字拆解......398
13.1.7 数字组合......400
13.2 思维扩展算法......403
13.2.1 蛇形打印......403
13.2.2 24 点算法......405
13.2.3 双色球随机摇号......409
13.2.4 巧妙过桥......412
13.2.5 猴子吃桃......415
13.2.6 天平称物......416
13.2.7 掷骰子游戏......418
13.3 小结......421

第 1 章 算法概述

计算机技术，特别是计算机程序设计大大改变了人们的工作方式。现代的设计任务大多通过计算机编程交给计算机来完成。其中，算法起到了至关重要的作用。可以毫不夸张地说，算法是一切程序设计的灵魂和基础。本章介绍算法的一些基本概念、发展历史、算法表示和应用等。

1.1 什么是算法

那么究竟什么是算法（algorithm）呢？从字面意义上也比较好理解，算法也就是用于计算的方法，通过这种方法可以达到预期的计算结果。

此外，在一般的教科书或者字典上也有关于算法的专业解释，例如：算法是解决实际问题的一种精确描述方法、算法是对特定问题的求解步骤的一种精确描述方法等。目前，被广泛认可的算法的专业定义是，算法是模型分析的一组可行的、确定的和有穷的规则。

其实，通俗地讲，算法可以理解为一个完整的解题步骤，由一些基本运算和规定的运算顺序而构成。通过这样的解题步骤可以解决特定的问题。从计算机程序设计的角度看，算法由一系列求解问题的指令构成，能够根据规范的输入，在有限的时间内获得有效的输出结果。算法代表了用系统的方法来描述解决问题的一种策略机制。

我们可以举一个例子来看看算法是如何在现实生活中发挥作用的。最典型的例子就是统筹安排，假设我们要有 3 件事（事件 A、事件 B 和事件 C）要做：

- 做事件 A 需要耗费 5 分钟；
- 做事件 B 需要耗费 5 分钟但需要 15 分钟的时间才可以得到结果，例如烧水等待水开的过程；
- 做事件 C 需要耗费 10 分钟。

那么我们应该怎么来做这三件事情呢？一种方法是依次做，如图 1-1 所示，做完事件 A，再做事情 B，最后做事情 C。这样，总的耗时是 5+（5+15）+10=35 分钟，这显然是浪费时间的一种方法。

在实际生活中比较可取的方法是，先做事件 B，在等待事件 B 完成的过程中做事件 A 和事件 C。这样，等待事件 B 完成的 15 分钟正好可以完成事件 A 和事件 C。此时，总的耗时是 5+15=20 分钟，效率明显提高，如图 1-2 所示。

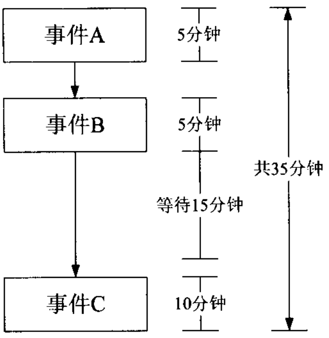


图 1-1　方法一

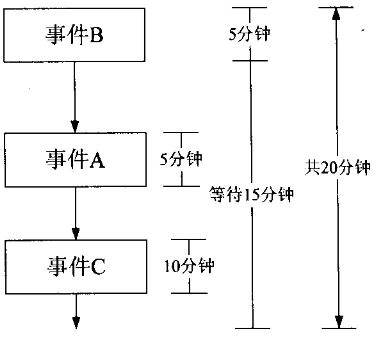


图 1-2　方法二

在上面的这个例子中，提到了两种方法，也就可以看做两种算法。第一种算法效率低，第二种算法效率高，但都达到了做完事情的目的。从这个例子可以看出，算法也是有好坏区别的，好的算法可以提供工作和生活的效率。算法的基本任务就是对于一个具体的问题，找到一个高效的处理方法，从而获得最佳的结果。

一个典型的算法一般都可以从其中抽象出 5 个特征：有穷性、确切性、输入、输出和可行性。下面结合上面的例子来分析这 5 个特征。

- 有穷性：

算法的指令或者步骤的执行次数是有限的，执行时间也是有限的。例如在上面的例子中，通过短短的几步就可以完成任务，而且执行时间都是有限的。

- 确切性：

算法的每一个指令或者步骤都必须有明确的定义和描述。例如在上面的例子中，为了完成做完三件事情的任务，每一步做什么事情都有明确的规定。

- 输入：

一个算法应该有相应的输入条件，用来刻画运算对象的初始情况。例如在上面的例子中，有三个待完成的事件（事件 A、事件 B 和事件 C）便是输入。

- 输出：

一个算法应该有明确的结果输出。这是容易理解的，没有得到结果的算法是毫无意义的。例如在上面的例子中，输出结果便是三件事情全部做完了。

- 可行性：

算法的执行步骤必须是可行的，且可以在有限时间内完成。例如在上面的例子中，每一个步骤都切实可行。其实，无法执行的步骤也是毫无意义的，解决不了任何实际问题。

目前，算法的应用非常广泛，常用的算法包括递推、递归、穷举、贪婪、分治、动态规划和迭代等多种。本书将逐步向读者展示各种算法的原理和应用。

1.2　算法的发展历史

关于算法的起源，可以追溯到中国古代公元前 1 世纪的《周髀算经》，它是算经的十书之一，原

名《周髀》，主要阐述古代中国的盖天说和四分历法。在唐朝的时候，被定为国子监明算科的教材之一，并改名为《周髀算经》。算法在古中国称为"演算法"。《周髀算经》中记载了勾股定理、开平方问题、等差级数问题等，里面用到了相当复杂的分数算法和开平方算法等。在随后的发展中，出现了割圆术、秦九韶算法和剩余定理等一些经典算法。

在西方，公元 9 世纪波斯数学家 al-Khwarizmi 提出了算法的概念。"算法"最初写为"algorism"，意思是采用阿拉伯数字的运算法则。到了 18 世纪，算法正式命名为现在的"algorithm"。由于汉字计算的不方便，导致中国古代算法的发展比较缓慢，而采用阿拉伯数字的西方国家则在随后的时间中发展迅速。例如著名的欧几里德算法（又称辗转相除法）就是典型的算法。

在历史上，大多数人都认可 Ada Byron 为第一个程序员。她在 1842 年编写巴贝奇分析机上的伯努利方程的求解算法程序，虽然未能执行，但奠定了计算机算法程序设计的基础。

后来，随着计算机的发展，在计算机上实现各种算法已成为可能。算法在计算机程序设计领域又得到了再次的重要发展。目前，几乎所有的程序员无论采用何种编程语言，都需要与算法打交道。

1.3 算法的分类

算法是一门古老且庞大的学科，随着历史的发展，演化出多种多样的算法。按照不同的应用和特性，可以分为不同的类别。

1．按照应用来分类

按照算法的应用领域，也就是解决的问题，算法可以分为基本算法、数据结构相关的算法、几何算法、图论算法、规划算法、数值分析算法、加密/解密算法、排序算法、查找算法、并行算法和数论算法等。

2．按照确定性来分类

按照算法结果的确定性来分类，可以分为确定性算法和非确定性算法。

- 确定性算法：这类算法在有限的时间内完成计算，得到的结果是唯一的，且经常取决于输入值。
- 非确定性算法：这类算法在有限的时间内完成计算，但是得到的结果往往不是唯一的，也就是存在多值性。

3．按照算法的思路来分类

按照算法的思路来分类，算法可以分为递推算法、递归算法、穷举算法、贪婪算法、分治算法、动态规划算法和迭代算法等多种。

1.4 算法相关概念的区别

算法其实是一个很抽象的概念，往往需要依托于具体的实现方法才能体现其价值，例如在计算机编程中的算法、数值计算中的算法等。本书所重点讲解的便是算法在计算机编程中的应用。正是由于算法的抽象性，导致读者很容易产生混淆，这里有必要说明一些基本的概念。

1.4.1 算法与公式的关系

从前面所谈到的算法，让我们很容易联想到数学中的公式。公式也是解决某类问题，有特定的输入和结果输出，能在有限时间内完成，并且公式都是完全可以操作计算的。其实公式确实是提供了一种算法，但算法绝不完全等于公式。

公式是一种高度精简的计算方法，可以认为就是一种算法，其是人类智慧的结晶。而算法并不一定是公式，算法的形式可以比公式更复杂，解决的问题更加广泛。

1.4.2 算法与程序的关系

正如前面所述，算法是依托于具体的实现方式的。虽然我们一提到算法，就联想到计算机程序设计，但算法并非仅用于此。例如，在传统的笔算中，通过纸和笔按照一定的步骤完成的计算也是算法的应用；在速记中，人们通过特殊的方法来达到快速牢固记忆的目的，这也是一种算法的应用。

在计算机程序设计中，算法的体现更广泛，几乎每个程序都需要用到算法，只不过有些算法比较简单，有些算法比较复杂而已。

算法和程序设计语言是不同的。目前比较流行的程序设计语言，包括 Visual Basic、C、C++、C#、Java、Pascal、Delphi、PB 等。程序设计语言是算法实现的一种形式，也就是一种工具。我们往往需要首先熟悉程序设计语言的语法格式，然后才能使用这种程序语言编写合适的算法实现程序。学习一门程序设计语言是比较容易的，难的是如何正确合理地运用算法来编写求解问题。

1.4.3 算法与数据结构的关系

数据结构是数据的组织形式，可以用来表征特定的对象数据。在计算机程序设计中，操作的对象是各式各样的数据，这些数据往往拥有不同的数据结构，例如数组、结构体、联合、指针和链表等。因为不同的数据结构所采用的处理方法不同，计算的复杂程度也不同，因此算法往往是依赖于某种数据结构的。也就是说，数据结构是算法实现的基础。

计算机科学家尼克劳斯·沃思（Nikiklaus Wirth）曾提出了一个著名的公式：数据结构+算法=程序。后来，他将其出版为著名的书《数据结构+算法=程序》。我们从中可以看到算法和数据结构的关系。

有了前面的介绍，我们现在对程序、算法、数据结构、程序设计语言有了比较深刻的认识。如果给出一个公式的话，可以表述成如下形式：

数据结构+算法+程序设计语言=程序

这里，数据结构往往表示的是处理的对象，算法是计算和处理的核心方法，程序设计语言是算法的实现方法。这几者的综合便构成一个实实在在的程序。

注意：算法是解决问题的一个抽象方法和步骤，同一个算法在不同的语言中具有不同的实现形式，这依赖于数据结构的形式和程序设计语言的语法格式。

1.5 算法的表示

算法是为了解决实际问题的，问题简单，算法也简单；问题复杂，算法也一般相应地复杂。为

了便于交流和进行算法处理，往往需要将算法进行描述，也就是算法的表示。一般来说，算法可以采用自然语言表示、流程图表示、N-S 图表示和伪代码表示。

1.5.1　自然语言表示

所谓自然语言，就是自然地随文化演化的语言，例如英语、汉语等。通俗地讲，自然语言就是我们平时口头描述的语言。对于一些简单的算法，可以采用自然语言来口头描述算法的执行过程，例如前面的统筹安排事件的例子。

但是，随着需求的发展，很多算法都比较复杂，很难用自然语言描述，同时自然语言的表述烦琐难懂，不利于发展和交流。因此，需要采用其他的方法来进行表示。

其实，我国古代早期的算法也可以看做是自然语言表示。正是由于这种复杂、烦琐的自然语言表示，大大阻碍了中国古代算法的发展。这也正是为什么我国古代算法起源早，但后期落后于西方国家的原因。

1.5.2　流程图表示

流程图是一种图形表示算法流程的方法，其由一些图框和流程线组成，如图 1-3 所示。其中，图框表示各种操作的类型，图框中的说明文字和符号表示该操作的内容，流程线表示操作的先后次序。

流程图最大的优点便是简单直观、便于理解，在计算机算法领域有着广泛的应用。例如，计算两个输入数据 a 和 b 的最大值，可以采用图 1-4 所示的流程图来表示。

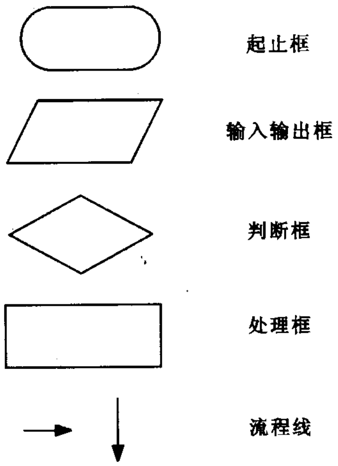


图 1-3　流程图的图元

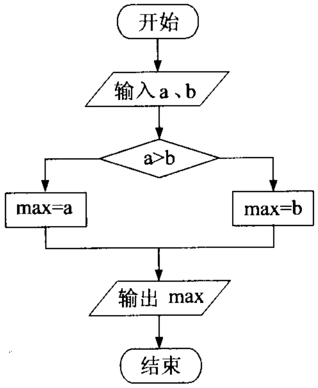


图 1-4　求最大值的流程图

在实际使用中，一般采用如下三种流程结构。

1．顺序结构

顺序结构是最简单的一种流程结构，简单地一个接着一个地进行处理，如图 1-5 所示。一般来说，顺序结构适合于简单的算法。

2．分支结构

分支结构常用于根据某个条件来决定算法的走向，如图 1-6 所示。这里首先判断条件 P，如果 P 成立，则执行 B；否则执行 A，然后再继续下面的算法。分支结构有时也称为条件结构。

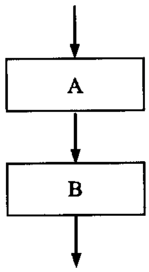


图 1-5　顺序结构

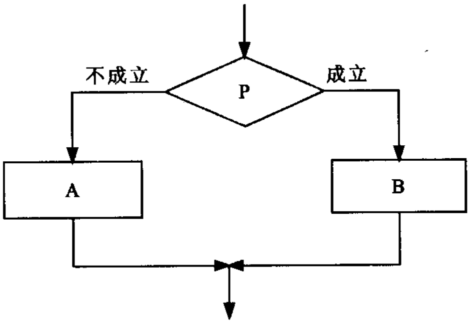


图 1-6　分支结构

3. 循环结构

循环结构常用于需要反复执行的算法操作，按照循环的方式，可以分为当型循环结构和直到型循环结构，分别如图 1-7 和图 1-8 所示。

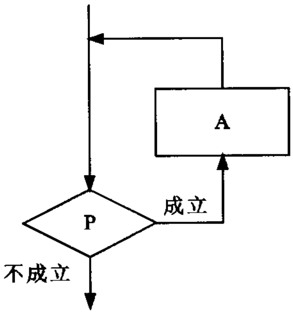


图 1-7　当型循环结构

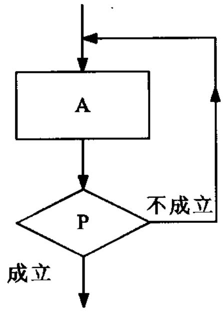


图 1-8　直到型循环结构

当型循环结构和直到型循环结构的区别如下：

- 当型循环结构先对条件进行判断，然后再执行，一般采用 while 语句来实现；
- 直到型循环结构先执行，然后再对条件进行判断，一般采用 until、do...while 语句来实现。

注意：无论当型循环结构还是直到型循环结构，都需要进行合适的处理，以保证能够跳出循环；否则构成死循环是没有任何意义的。

一般来说，采用上述三种流程结构，可以完成所有的算法任务。通过合理安排流程结构，可以构成结构化的程序，这样便于算法程序的开发和交流。

1.5.3 N-S 图表示

N-S 图也被称为盒图或者 CHAPIN 图，1973 年由美国学者 I.Nassi 和 B.Shneiderman 提出。他们发现采用流程图可以清楚地表示算法或程序的运行过程，但其中的流程线并不是必须的，因此而创立了 N-S 图。在 N-S 图中，把整个程序写在一个大框图内，这个大框图由若干个小的基本框图构成。采用 N-S 图也可以方便地表示流程图的内容。

采用 N-S 图表示的顺序结构，如图 1-9 所示。采用 N-S 图表示的分支结构，如图 1-10 所示。采用 N-S 图表示的当型循环结构，如图 1-11 所示。采用 N-S 图表示的直到型循环结构，如图 1-12 所示。

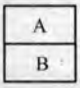


图 1-9　顺序结构

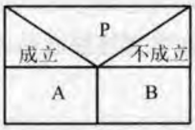


图 1-10　分支结构

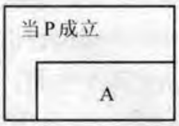


图 1-11　当型循环结构

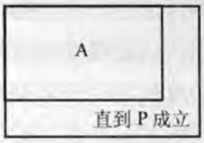


图 1-12　直到型循环结构

1.5.4　伪代码表示

伪代码（Pseudocode）是另外一种算法描述的方式。伪代码并非真正的程序代码，其介于自然语言和编程语言之间。因此，伪代码并不能在计算机上运行。使用伪代码的目的是将算法描述成一种类似于编程语言的形式，例如 C、C++、Java、Pascal 等。这样，程序员便可以很容易理解算法的结构，再根据编程语言的语法特点，稍加修改，便可以实现一个真正的算法程序。

之所以能够使用伪代码的一个重要原因是 C 语言的广泛应用，其他语言（例如 C++、Java、C#等）大都借鉴了 C 语言的语法特点。这些编程语言在很大程度上都和 C 语言类似，例如都采用 if 语言表示条件分支和判断，采用 for 语句、while 语句表示循环等。因此，我们可以利用这些共性来描述算法，而忽略编程语言之间的差异。

在使用伪代码表示算法时，程序员可以使用自然语言来进行表述，也可以采用简化的编程语句来表示，相当灵活。不过，为了编程代码的交流和重利用，程序员还是应该尽可能地表述清楚。

下面举一个简单的伪代码表示的程序代码的例子。

```
变量 a<-输入数据
变量 b<-输入数据

if a>b
    变量 max<-a
else
    变量 max<-b

输出变量 max
程序结束
```

在这里，演示的是求两个数据最大值的伪代码。首先将输入的数据分别赋值给变量 a 和变量 b，然后通过 if 语句进行判断，将最大者赋值给变量 max，最后输出变量 max。从这个例子可以看出，伪代码表示很灵活，但又高度接近编程语言。程序员可以根据这段伪代码和某种编程语言的语法特点进行修改，从而得到真正可执行的程序代码。

在使用伪代码时，描述应该结构清晰、代码简单、可读性好，这样才能够更有利于算法的表示。否则，将适得其反，让人很难懂，就失去伪代码表示的意义了。

1.6　算法的性能评价

算法其实就是解决问题的一种方法，一个问题的解决往往可以采用多种方法，但每种方法所用的时间和得到的效果往往是不一样的。从前面的统筹安排的例子可以看出，好的算法执行效率高，所耗费的时间短；差的算法则往往需要耗费更多的时间，导致效率很低。

算法的一个重要任务便是找到合适的、效率最高的解决问题的方法，也就是最好的算法。从理论上，这就需要对算法的性能有一个合理的评价。一个算法优劣往往通过算法复杂度来衡量，算法复杂度包括时间复杂度和空间复杂度两个方面。

1.6.1 时间复杂度

时间复杂度也就是通常所说的算法执行所需要耗费的时间，时间越短，算法越好。一个算法执行的时间往往无法精确估计，通常需要在实际的计算机中运行才能够知道。但是，我们也可以对算法代码进行估计，而得到算法的时间复杂度。

首先，算法代码执行的时间往往和算法代码中语句执行的数量有关。由于每条语句执行都是需要时间的，语句执行的次数越多，整个程序所耗费的时间就越长。因此，简短、精悍的算法程序往往执行速度快。

另外，算法的时间复杂度还与问题的规模有关。这方面在专门的算法分析中有详细的分析，这里限于篇幅就不再详述了。有兴趣的读者可以参阅算法分析相关的书籍。

1.6.2 空间复杂度

空间复杂度指的是算法程序在计算机中执行所需要消耗的存储空间。空间复杂度其实可以分为如下两个方面：

- 程序保存所需要的存储空间，也就是程序的大小。
- 程序在执行过程中所需要消耗的存储空间资源，例如程序在执行过程中的中间变量等。

一般来说，程序的大小越小，执行过程中消耗的资源越少，这个程序越好。在算法分析中，空间复杂度有更为详细的度量，这里限于篇幅就不再赘述了，有兴趣的读者可以阅读相关的书籍。

1.7 算法实例

通过前面的介绍，我们对算法有了更为清晰的认识。算法是一个抽象的解决问题的方法，需要依托于具体的实现手段才能体现其价值。由于本书重点讨论的是计算机程序设计中的算法，因此这里的实现手段可以狭隘地认为是编程语言，例如 C、C++、C#、Basic、Java、Pascal 等。

在本书中以流行的 Java 语言为例来介绍各种算法的原理和应用。对于其他编程语言，只要熟练了算法的原理和编程语言的语法特点，只需对代码稍加修改，就可以很方便地进行移植。

明确了编程语言之后，还需要确定编程工具。目前流行的 Java 语言集成开发环境包括 JDK、NetBeans、JBuiler、Eclipse 等。本书选用了应用最为广泛的 Eclipse 集成开发环境，版本为 Indigo Release。其实本书中的所有程序都可以不加修改或者稍加修改便可以在其他集成开发环境中运行。

在正式进入算法讲解之前，本节先带领读者在 Eclipse 集成开发环境中完成一个简单的算法程序的编写、调试和应用。在后面的章节中，将会直接给出算法的源代码和运行结果，而不会再赘述本节的操作步骤，以便于突出重点。

1.7.1 查找数字

在一个数组中查找数据是经常用到的操作，例如在一个班级学生档案集中查找某个学生的记录

等。这里将这个问题进行简化，程序随机生成一个 20 个整数数据的数组，然后输入要查找的数据。接着，可以采用最简单的逐个对比的方法进行查找，也就是顺序查找的方法，这种方法的伪代码示例如下。

```
变量 x<-输入待查找的数据
变量 arr<-随机生成数据数组

for 1 to 20
    if arr[i]==x
        break;找到数据
    else


输出该数据的位置
程序结束
```

这里的伪代码仅表示了算法的一个基本流程，并不是真正的算法程序代码。但从这里可以看出这个程序的基本结构，首先输入待查找的数据，并生成一个随机的数据数组，然后从头到尾对数据进行逐个比较，当数据相等的时候找到数据，并输出该数据的位置。

下面就给出该算法的完整的 Java 语言代码。

【程序 1-1】

```
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;

public class P1_1 {
    static int N=20;
    public static void main(String[] args) {
        int[] arr=new int[N];
        int x,n,i;
        int f=-1;

        Random r=new Random();                          //随机种子
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            arr[i]=r.nextInt(100);                      //产生数组
        }

        System.out.print("随机生成的数据序列:\n");
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            System.out.print(arr[i]+" ");               //输出序列
        }
        System.out.print("\n\n");

        System.out.print("输入要查找的整数:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        x=input.nextInt();                              //输入要查找的数

        for(i=0;i<N;i++)                                //顺序查找
        {
            if(x==arr[i])                               //找到数据
            {
```

```
                f=i;
                break;
            }
        }
        if(f<0)                                          //输出查找结果
        {
            System.out.println("没找到数据:"+x);
        }
        else
        {
            System.out.print("数据:"+x+" 位于数组的第 "+(f+1)+" 个元素处.\n");
        }

    }
}
```

在该程序中，main()方法生成 20 个随机数，然后 for 语句和 if 语句进行顺序查找。当查找到该数据时，便退出查找，输出该数据的位置；否则输出没找到数据。

1.7.2 创建项目

明确算法程序后，便可以在 Eclipse 集成开发环境中执行该程序。首先，我们需要创建一个 Java 项目，并添加一个空的源程序文件供代码编写。主要的操作步骤如下：

（1）启动 Eclipse 集成开发环境。

（2）选择“File”→“New”菜单命令，打开“New Project”对话框，如图 1-13 所示。

（3）在“Java”节点下选择“Java Project”选项。

（4）单击“Next”按钮，在弹出的对话框中的“Project name”文本框中输入工程名“P1”，其他采用默认设置，如图 1-14 所示。

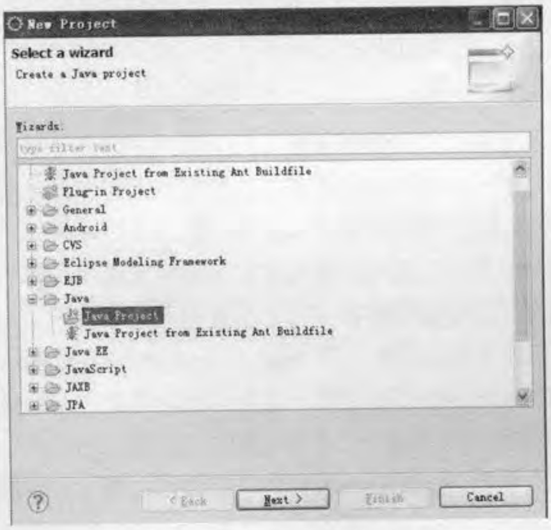


图 1-13 “New Project”对话框

图 1-14 输入工程名“P1”

（5）单击“Next”按钮，此时弹出 Java Settings 对话框，如图 1-15 所示。该对话框中列出了创建项目所依赖的系统库等信息。

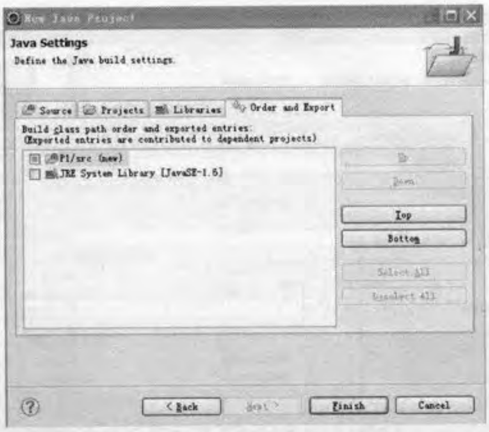


图 1-15　Java Settings 对话框

（6）单击“Finish”按钮，完成项目的建立。这个时候只是一个空项目，项目中没有任何的文件，如图 1-16 所示。

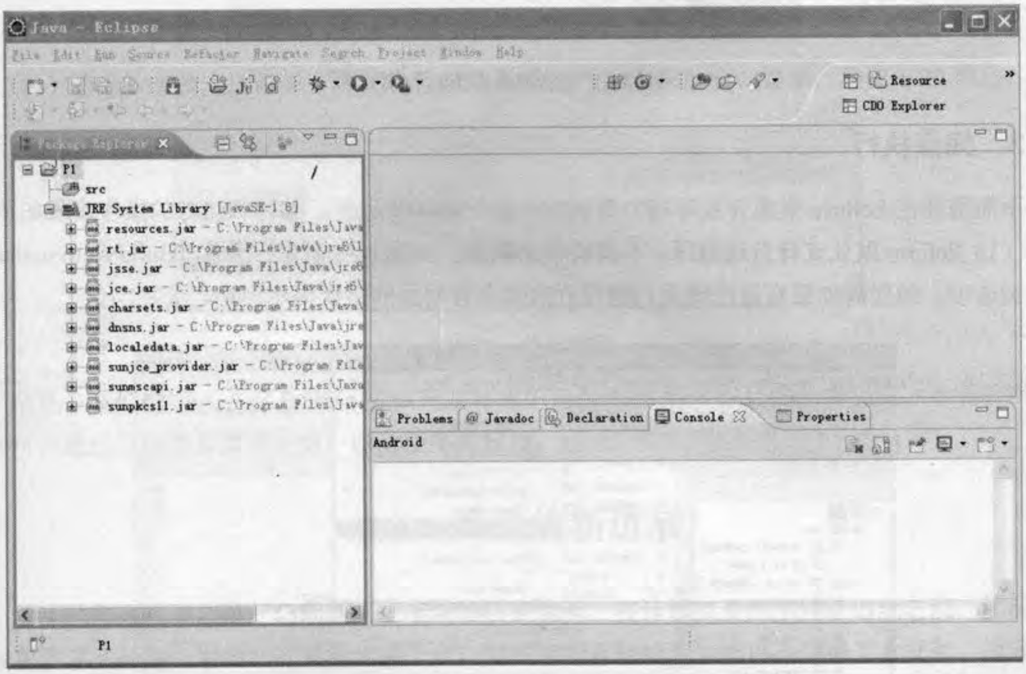


图 1-16　空项目

（7）下面需要在该项目中添加源代码文件。选择“File”→“New”→“Class”菜单命令，打开“New Java Class”对话框，如图 1-17 所示。

（8）在“New Java Class”对话框的“Name”文本框中输入源代码文件的名称“P1_1”，并选择“public static void main(String[] args)”复选框。

（9）单击“Finish”按钮，该文件将自动添加到该项目中。

这样，我们便完成了一个基本 Java 项目的创建。这里创建的 Java 文件是一个框架，我们只需将前面的【程序 1-1】输入到其中即可。

图 1-17　“New Java Class”对话框

1.7.3　编译执行

下面需要在 Eclipse 集成开发环境中对该程序进行编译和运行。编译和运行的操作步骤如下：

（1）Eclipse 默认支持自动编译，不需要手动编译。如图 1-18 所示，确认“Build Automatically”选项被选中。源代码如果有语法错误，错误行前面会有明显的错误提示标记。

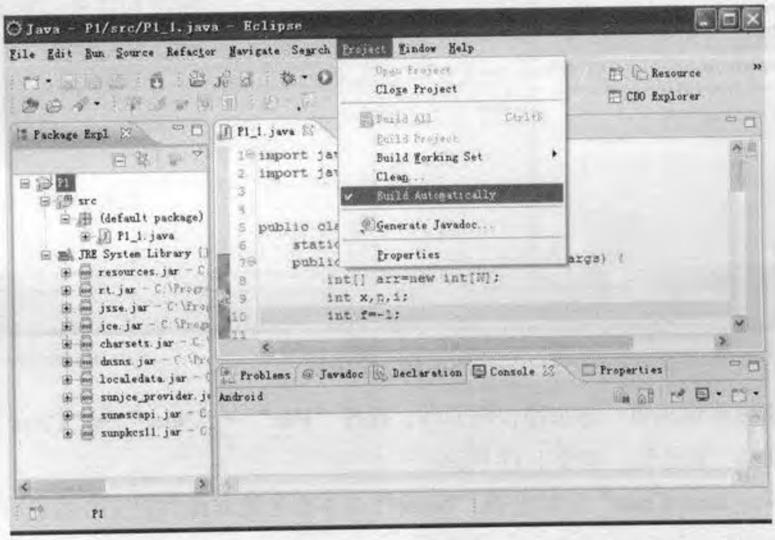


图 1-18　确认“Build Automatically”选项

（2）运行程序，在文件上右击，在弹出的菜单中选择“Run As”→“Java Application”菜单命令，如图 1-19 所示。

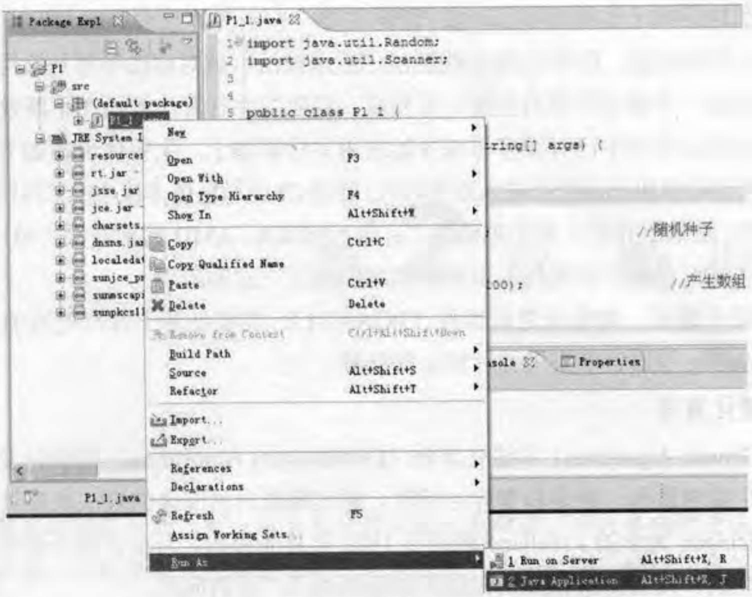


图 1-19 运行菜单

(3) 查看程序执行的结果。程序执行的结果通过“Console”窗口显示，如图 1-20 所示。

图 1-20 执行结果

至此，我们便完成了在 Eclipse 集成开发环境中进行 Java 程序设计的基本步骤。本书中很多例子都可以通过这样的步骤来完成，以后便不再赘述。

1.8 算法的新进展

算法的起源很早，是一门随着历史不断发展的学科。在计算机及程序设计出现之前，算法停留在演算和手工计算的层面。计算机出现之后，算法在计算机编程领域再次获得了大发展，很多以前不可能实现的算法，现在都可以实现了。

其实，算法是一个扎根于数学和物理的科学。数学和物理学上的新发展往往能够激发一些新的算法应用的产生。现在，就向读者展示一下近现代算法的一些新进展。

1. 并行算法

我们经常接触的算法模式都是单线程顺序计算的，即使其中采用了 if 分支语句或者其他跳转语言，也都是按照单一线程，每次仅完成一步操作，这就是串行计算的思想。而现在计算领域正在向并行计算方向发展，例如多核心处理器、多台计算机的分布式并行计算等。在并行计算中，一个任务可以分在多个线程来同时计算，大大加速了计算的速度。

并行计算的思路不同于传统的串行计算，因此需要一些新的算法来展示并行计算的优势。目前，划分法、分治法、平衡树法、倍增法/指针跳跃法、流水线法、破对称法等都是常用的并行算法。而且，由于并行计算是一个蓬勃发展的全新计算领域，相应的并行算法都还在不断发展中。

其实，我们在实际应用中已有很多领域开始应用并行算法了，主要体现在如下几个方面：

- 我们最常用的计算机已经全面进入双核时代，四核 CPU 乃至更多核心的 CPU 也都逐步实用化。
- 显卡的 GPU 是基于并行计算的思路的，目前 NVIDIA、AMD 等都在大力推广 GPU 的并行计算能力，并且已在科学研究和工程计算领域得到了一定的应用。
- 硬件电路设计领域，可编程逻辑器件 FPGA/CPLD 等都是基于并行处理的思想，可以通过 VHDL、Verilog 等语言来实现并行算法的处理。

2. 遗传与进化算法

遗传算法（Genetic Algorithm）和进化算法（Evolutionary Algorithms）是学科交叉的结果。遗传与进化算法根据生物的遗传、进化和变异的特性，通过模拟自然演化的方法来得到最优解。遗传算法最初由美国 Michigan 大学的 J.Holland 教授于 1975 年首先提出，目前在组合优化、机器学习、信号处理、自适应控制、人工生命和人工智能等领域得到了广泛的应用。

3. 量子算法

量子物理学的发展是近现代物理学领域的最大突破，其提出了一系列颠覆性的概念和方法。量子物理学的发展，使其迅速与信息论和计算相结合，产生了量子信息技术和量子计算。量子计算是一种依照量子力学理论进行的新型计算，量子计算的基础和原理使其能够大大超越传统的图灵机模型的计算机。

量子计算（quantum computation）的概念最早由 IBM 的科学家 R. Landauer 及 C. Bennett 于 20 世纪 70 年代提出。1985 年，牛津大学的 D. Deutsch 提出量子图林机（quantum Turing machine）的概念，量子计算才开始具备了数学的基本形式。采用量子计算机和相应的量子算法，可以实现超高速并行计算，现成为各国科学家的重要研究方向。

目前，已经发展的量子算法包括量子 Shor 算法、Grover 搜索算法、Hogg 搜索算法等。量子算法需要依赖量子计算机来实现。现在，可以实现量子计算的途径包括光子偏振、空腔量子电动力学、离子阱和核磁共振等。这些都处于刚刚起步阶段，离实用还有一段距离，但这都代表了高性能计算和算法的一个发展方向。

1.9 小　　结

算法是一门非常重要的科学，在计算机程序设计以及其他领域都有着广泛的应用。本章首先介绍了算法的概念、发展历史、算法的分类。然后，重点区分了算法与公式、程序、数据结构的关系，帮助读者了解一些基本的概念。接着，介绍了算法的自然语言表示、流程图表示、N-S 图表示和伪代码表示，同时还介绍了如何评价一个算法的优劣。本章还通过一个完整的实例，向读者掩饰了如何进行 Java 语言程序设计，这是 Java 语言算法学习的基础。本章最后还向读者介绍了一些近现代算法的最新进展，拓宽读者的知识面。

第2章 数据结构

数据结构是数据的组织形式，可以用来表征特定的对象数据。在计算机程序设计中，操作的对象是各式各样的数据，这些数据往往拥有不同的数据结构，例如数组、接口、类等。而算法和数据结构具有千丝万缕的联系，计算机科学家尼克劳斯·沃思（Nikiklaus Wirth）提出“数据结构+算法=程序”的著名公式。这是因为不同的数据结构所采用的处理方法不同，计算的复杂程度也不同，因此算法往往是依赖于某种数据结构的，即数据结构是算法实现的基础。本章就来介绍一下数据结构的概念和几种典型数据结构的应用。

2.1 数据结构概述

数据结构是计算机中对数据的一种存储和组织方式，同时也泛指相互之间存在一种或多种特定关系的数据的集合。数据结构是计算机艺术的一种体现，合理的数据结构能够提高算法的执行效率，还可以提高数据的存储效率。

2.1.1 什么是数据结构

那么到底什么是数据结构，数据结构的具体定义是什么呢？数据结构是计算机程序设计的产物，其实，到现在为止，计算机技术领域中还没有一个统一的数据结构的定义。不同的专家往往对数据结构有不同的描述，以下就是几种典型的定义。

“数据结构是数据对象、存在于该对象的实例以及组成实例的数据元素之间的各种关系，并且这种关系可以通过定义相关的函数来给出。”这是 Sartaj Sahni 在其经典著作《数据结构、算法与应用》一书中提出的，他将数据对象定义为一个实例或值的集合。

“数据结构是抽象数据类型 ADT 的物理实现。”这是 Clifford A.Shaffer 在其《数据结构与算法分析》一书中定义的。其中抽象数据类型 ADT，英文全称为 Abstract Data Type，简称为 ADT。抽象数据类型 ADT 的概念我们将在后面讲到。

Lobert L.Kruse 也给出了数据结构设计过程的概念，他认为一个数据结构的设计过程可以分为抽象层、数据结构层和实现层。其中，抽象层是指抽象数据类型层，也就是 ADT 层，主要讨论数据

的逻辑结构及其运算；数据结构层讨论一个数据结构的表示；实现层讨论一个数据结构在计算机内的存储细节以及运算的实现。

虽然业界没有一个统一的定义，但是这些定义都是具有相同的含义的。我们在这里只需要了解数据结构的基本含义，并能够使用其解决问题即可。我们可以这样简单地理解数据结构，一个数据结构是由数据元素依据某种逻辑联系组织起来的，对数据元素间逻辑关系的描述称为数据的逻辑结构。由于数据必须在计算机内存储，数据的存储结构是其在计算机内的表示，也就是数据结构的实现形式。另外，讨论一个数据结构，必须涉及在该类数据上执行的运算。

数据结构是一切算法的基础，而且不仅如此，数据结构可以说是程序设计语言的基础。正是由于对数据结构的深入理解，才导致多种多样的程序设计语言的诞生，例如 Java、C++、C#等。其中，面向对象的程序设计语言就是完善处理对象类型数据结构的范例，这在某些方面可以方便地描述和解决实际问题。

2.1.2 数据结构中的基本概念

深入了解数据结构之前，我们需要简单掌握一下数据结构中涉及的一些基本概念，主要包括如下几个：

- 数据（Data）：数据是信息的载体，其能够被计算机识别、存储和加工处理，是计算机程序加工的“原材料”。数据包括的类型是非常广的，例如基本的整数、字符、字符串、实数等，此外，图像和声音等也都可以认为是一种数据。
- 数据元素（Data Element）：数据元素是数据的基本单位，其也称元素、结点、顶点、记录等。一般来说，一个数据元素可以由若干个数据项组成，数据项是具有独立含义的最小标识单位。数据项也可称为字段、域、属性等。
- 数据结构（Data Structure）：数据结构指的是数据之间的相互关系，也就是数据的组织形式。这就是本章所要讨论的主要内容。

这几个概念在后面讲解过程中会用到，读者在这里需要对其有个概念上的了解就可以了。

2.1.3 数据结构的内容

一般来说，数据结构包括三方面的内容，数据的逻辑结构、数据的存储结构和数据的运算。下面就将分析这三个方面的内容。

- 数据的逻辑结构（Logical Structure）：也就是数据元素（Data Element）之间的逻辑关系。数据的逻辑结构是从逻辑关系上描述数据的，与数据在计算机中是如何存储无关的，也就是独立于计算机的抽象概念。从数学分析的角度来看，数据的逻辑结构可以看做是从具体问题抽象出来的数学模型。
- 数据的存储结构（Storage Structure）：也就是数据元素（Data Element）及其逻辑关系在计算机存储器中的表示形式。数据的存储结构依赖于计算机语言，是逻辑结构用计算机语言的实现。一般来说，只有在高级语言的层次上才会讨论存储结构，在低级的机器语言中，存储结构是具体的。
- 数据的运算：也就是能够对数据施加的操作。数据的运算其基础在于数据的逻辑结构上，每种逻辑结构都可以归纳一个运算的集合。在数据结构范畴内，最常用的运算包括检索、插入、删除、更新、排序等。

1. 数据结构的例子

为了便于读者理解，下面我们便举一个例子来看看有关数据结构的概念和内容。表 2-1 所示为某班级学生的各科成绩，这里显示的是其中一部分。

表 2-1 某班级学生成绩表

学 号	姓 名	数 学	物 理	英 语	语 文
10001	张三	90	87	90	70
10002	李四	88	78	89	80
10003	陈九	92	93	90	85
10004	王一	90	90	89	84
10005	赵六	92	98	80	80
…	…	…	…	…	…
10099	马七	94	90	85	87

在表 2-1 中，每一行可以看做是一个数据元素（Data Element），也可以称为记录或者结点。这个数据元素由学号、姓名、数学成绩、物理成绩、英语成绩和语文成绩等数据项构成。

我们通过这个表首先来看一下数据元素之间的逻辑关系。下面用数据结构的语言来描述一下这些逻辑关系。

- 对表中任意一个结点，直接前趋（Immediate Predecessor）结点最多只有一个。直接前趋结点也就是与它相邻且在它前面的结点。
- 对表中任意一个结点，直接后继（Immediate Successor）结点最多只有一个。直接后继结点也就是与它相邻且在它后面的结点。
- 表中只有第一个结点没有直接前趋，也就是开始结点。
- 表中只有最后一个结点没有直接后继，也就是终端结点。

例如，表中“张三”所在的结点就是开始结点，“马七”所在的结点就是终端结点。表中间的“陈九”所在结点的直接前趋结点是“李四”所在的结点，表中间的“陈九”所在结点的直接后继结点是“王一”所在的结点。这些结点关系就构成了某班级学生成绩表的逻辑结构。

然后再来看一下数据的存储结构。我们知道数据的存储结构是数据元素及其逻辑关系在计算机存储器中的表示形式。这就需要采用计算机语言来进行描述，例如是每个结点按照顺序依次存储在一片连续的存储单元中呢，还是存储在分散的空间而使用引用将这些结点链接起来呢？这方面的内容，我们会在后面进行详述。

最后，我们再看一下数据的运算。当我们拿到这个表之后，会进行哪些操作呢？一般来说，主要包括如下一些操作。

- 查找某个学生的成绩。
- 对于新入学的学生，在表中增加一个结点来存放。
- 对于退学的学生，将其结点从表中删除。

当然，还包含一些计算每个学生的总成绩、平均成绩、整个班级的平均成绩等，不过这些就不属于数据结构的范畴了。以上三种操作就是最基本的数据结构的运算，即数据结点的查找、插入和删除。

这样，我们结合这个简单的例子便理解了数据结构的基本概念和内容。

2．数据结构是一个有机的整体

其实，数据的逻辑结构、数据的存储结构和数据的运算是一个整体，孤立地去理解这三者中的任何一个都是不全面的。这主要表现在如下几方面。

- 同一个逻辑结构可以有不同的存储结构。

逻辑结构和存储结构是两个概念，同一个逻辑结构可以有不同的存储结构。例如，线性表是最简单的一种逻辑结构，如果线性表采用顺序方式存储，这种数据结构就是顺序表；如果线性表采用链式方式存储，这种数据结构就是链表；如果线性表采用散列方式存储，这种数据结构就是散列表。

- 同一种逻辑结构也可以有不同的数据运算集合。

数据的运算是数据结构中十分重要的内容。一个相同的数据逻辑结构和存储结构，而采用不同的运算集合及运算性质，将导致全新的数据结构。例如线性表，如果将线性表的插入运算限制在表的一段，而删除操作限制在表的另一端，那么这种数据结构就是队列；如果将线性表的插入和删除操作都限制在表的同一段，那么这种数据结构就是栈。

数据结构中的这三方面是一个有机的整体，缺一不可。数据的逻辑结构、数据的存储结构和数据的运算任何一个发生变化都将导致一个全新的数据结构出现。

2.1.4 数据结构的分类

数据结构有很多种，一般来说，按照数据的逻辑结构来对其进行简单地分类，包括线形结构和非线性结构两类。

1．线形结构

简单地说，线性结构就是表中各个结点具有线性关系。如果从数据结构的语言来描述的话，线性结构应该包括如下几点：

- 线性结构是非空集；
- 线性结构有且仅有一个开始结点和一个终端结点；
- 线性结构所有结点最多只有一个直接前趋结点和一个直接后继结点。

前面提到的线性表就是典型的线性结构，还有栈、队列和串等都是线性结构。

2．非线性结构

简单地说，非线性结构就是表中各个结点之间具有多个对应关系。如果从数据结构的语言来描述的话，非线性结构应该包括如下几点：

- 非线性结构是非空集；
- 非线性结构的一个结点可能有多个直接前趋结点和直接后继结点。

在实际应用中，数组、广义表、树结构和图结构等数据结构都是非线性结构。

2.1.5 数据结构的几种存储方式

数据的存储结构是数据结构的一个重要内容。在计算机中，数据的存储结构可以采用如下四种方法来实现。

1. 顺序存储方式

简单地说，顺序存储方式就是在一块连续的存储区域一个接着一个地存放数据。顺序存储方式把逻辑上相邻的结点存储在物理位置上相邻的存储单元里，结点间的逻辑关系由存储单元的邻接关系来体现。顺序存储方式也称为顺序存储结构（Sequential Storage Structure），一般采用数组或者结构数组来描述。

线性存储方式主要用于线性逻辑结构的数据存放，而对于图和树等非线性逻辑结构则不适用。

2. 链接存储方式

链接存储方法比较灵活，其不要求逻辑上相邻的结点在物理位置上相邻，结点间的逻辑关系由附加的引用字段表示。一个结点的引用字段往往指向下一个结点的存放位置。

链接存储方式也称为链式存储结构（Linked Storage Structure），一般在原数据项中增加引用类型来表示结点之间的位置关系。

3. 索引存储方式

索引存储方法是采用附加的索引表的方式来存储结点信息。索引表由若干索引项组成。索引存储方式中索引项的一般形式为：（关键字、地址）。其中，关键字是能够唯一标识一个结点的数据项。

索引存储方式还可以细分为两类：

- 稠密索引（Dense Index）：这种方式中每个结点在索引表中都有一个索引项，其中，索引项的地址指示结点所在的存储位置；
- 稀疏索引（Spare Index）：这种方式中一组结点在索引表中只对应一个索引项。其中，索引项的地址指示一组结点的起始存储位置。

4. 散列存储方式

散列存储方式是根据结点的关键字直接计算出该结点的存储地址的一种存储方式。

在实际应用中，往往需要根据具体的数据结构来决定采用哪种存储方式。同一逻辑结构采用不同的存储方法，可以得到不同的存储结构。而且这四种基本存储方法，既可单独使用，也可组合起来对数据结构进行存储描述。

2.1.6　数据类型

谈到数据类型，我们并不陌生。几乎每一种程序设计语言都会讲到数据类型的概念。简单地说，数据类型就是一个值的集合以及在这些值上定义的一系列操作的总称。例如，对于 C 语言的整数类型，其有一定的取值范围，对于整数类型还定义了加法、减法、乘法、除法和取模运算等操作。

按照数据类型的值是否可以分解，数据类型可以分为基本数据类型和聚合数据类型。

- 基本数据类型：其值不能进一步分解，一般是程序设计语言自身定义的一些数据类型。例如 C 语言中的整型、字符型、浮点型等。
- 聚合数据类型：其值可以进一步分解为若干个分量，一般是用户自定义的数据类型。例如 C 语言中的结构、数组等。

以上这些数据类型的概念在一般的程序设计语言中都会讲到。在这里介绍数据结构的时候，我们将重点看一下另外一个概念，抽象数据类型（Abstract Type，简称为 ADT）。

抽象数据类型 ADT 指的是数据的组织及其相关的操作，ADT 可以看做是数据的逻辑结构及其

在逻辑结构上定义的操作。一个抽象数据类型 ADT 可以定义为如下形式：

```
ADT 抽象数据类型名
{
    数据对象：（数据元素集合）
    数据关系：（数据关系二元组结合）
    基本操作：（操作函数的罗列）
}ADT 抽象数据类型名;
```

抽象数据类型 ADT 一般具有如下两个重要特征：

- 数据抽象：使用抽象数据类型 ADT 时，其强调的是实体的本质特征，所能够完成的功能以及与外部用户的接口。
- 数据封装：用于将实体的外部特性和其内部实现细节进行分离，并且对外部用户隐藏其内部实现细节。

抽象数据类型 ADT 可以看做是描述问题的模型，它独立于具体实现。ADT 的优点是将数据和操作封装在一起，使得用户程序只能通过在 ADT 里定义的某些操作来访问其中的数据，从而实现了信息隐藏。在 Java 语言中是使用接口来表示抽象数据类型 ADT，用接口的实现类来实现 ADT 的。

抽象数据类型 ADT 和接口的概念其实很好地表现了程序设计中的两层抽象。抽象数据类型 ADT 是概念层上的抽象，而接口则属于实现层上的抽象。

2.1.7 常用的数据结构

在计算机科学的发展过程中，数据结构也在随着发展。目前，程序设计中常用的数据结构包括如下几个。

1. 数组（Array）

数组是一种聚合数据类型，是将具有相同类型的若干变量有序地组织在一起的集合。数组可以说是最基本的数据结构，在各种编程语言中都有对应。一个数组可以分解为多个数组元素，按照数据元素的类型，数组可以分为整型数组、字符型数组、浮点型数组、对象数组等。数组还可以有一维、二维以及多维等表现形式。

2. 栈（Stack）

栈是一种特殊的线性表，其只能在一个表的一个固定端进行数据结点的插入和删除操作。栈按照后进先出的原则来存储数据，也就是说，先插入的数据将被压入栈低，最后插入的数据在栈顶，读出数据的时候，从栈顶开式逐个读出。栈在汇编语言程序中，经常用于重要数据的现场保护。栈中没有数据时，称为空栈。

3. 队列（Queue）

队列和栈类似，也是一种特殊的线性表。和栈不同的是，队列只允许在表的一端进行插入操作，而在另一端进行删除操作。一般来说，进行插入操作的一端称为队尾，进行删除操作的一端称为队头。队列中没有元素时，称为空队列。

4. 链表（Linked List）

链表是一种数据元素按照链式存储结构进行存储的数据结构，这种存储结构在物理上存在非连续的特点。链表由一系列数据结点构成，每个数据节点包括数据域和引用域两部分。其中，引用域

保存了数据结构中下一个元素存放的地址。链表结构中数据元素的逻辑顺序是通过链表中的引用链接次序来实现的。

5. 树（Tree）

树是典型的非线性结构，其是包括 n 个结点的有穷集合 K。在树结构中，有且仅有一个根结点，该结点没有前驱结点。在树结构中的其他结点都有且仅有一个前驱结点，而且可以有 m 个后继结点，m≥0。

6. 图（Graph）

图是另外一种非线性数据结构。在图结构中，数据结点一般称为顶点，而边是顶点的有序偶对。如果两个顶点之间存在一条边，那么就表示这两个顶点具有相邻关系。

7. 堆（Heap）

堆是一种特殊的树型数据结构，我们一般讨论的堆都是二叉堆。堆的特点是其根结点的值是所有结点中最小的或者最大的，并且根结点的两个子树也是一个堆结构。

8. 散列表（Hash）

散列表源自于散列函数（Hash function），其思想是如果在结构中存在关键字和 T 相等的记录，那么必定在 F(T)的存储位置可以找到该记录，这样就可以不用进行比较而直接取得所查记录。

2.1.8　选择合适的数据结构解决实际问题

计算机的产生给我们带来了很大的方便，我们可以使用计算机来解决各种各样的问题。计算机能够处理的问题一般可以分为两类：数值计算问题和非数值计算问题。

对于数值计算问题，这在早期的计算机发展中占据了很大的比例。例如，线性方程的求解、矩阵的计算等。这类问题一般需要程序设计的技巧和相应的数学知识，而数据结构方面涉及比较少。

随着计算机应用范围的扩大，一些非数值计算问题越来越突出，成为计算机解决的焦点问题。目前来说，非数值计算问题大约占据了 80%的计算机工作时间。这类问题不再是单单需要数学知识，而且还需要设计合理的数据结构才能高效解决问题。例如，在一个包含大量数据的电话号码簿中查找指定号码的问题，运动比赛的赛程时间安排问题等。这些问题往往不能简单地用数学公式来表示，需要合理地选择数据结构来处理。

在本书中，对于数值计算问题和非数值计算问题都会涉及。数值计算相关的问题主要是一些数学和工程中的计算算法，包括多项式求解、矩阵计算、微分、积分等算法。非数值计算问题主要是本章的数据结构以及后面章节中的数据结构问题。

2.2　线　性　表

从这一节开始，我们便介绍各种常用的数据结构。首先第一个要看的便是线性表，这是一种典型的线性结构，是最简单最常用的数据结构。

2.2.1　什么是线性表

谈到线性表（Linear List），首先应该从线性表的逻辑定义来看。从逻辑上来看，线性表就是由 n（n≥0）个数据元素 a_1，a_2，…，a_n 组成的有限序列。这里需要说明如下几点：

- 数据元素的个数为 n，也称为表的长度，当 n=0 的时候称为空表；
- 如果一个线性表非空，也就是 n>0，则可以简单地记作（a_1，a_2，…，a_n）；
- 数据元素 a_i（1≤i≤n）表示了各个元素，在不同的场合，其含义也不同。

在现实生活中，我们可以找到很多线性表的例子。比如英文字母表就是最简单的线性表，英文字母表（A，B，C，…，Z）中，每个英文字符就是一个数据元素，也称为数据结点。另外，前面的表 2-1 某班级学生成绩表的例子也是一个线性表。在这里，数据元素就是某个学生的记录，其中包括学号、姓名、各个科目的成绩等。

对于一个非空的线性表，其逻辑结构特征如下：

- 有且仅有一个开始结点 a_1，没有直接前趋结点，有且仅有一个直接后继结点 a_2；
- 有且仅有一个终结结点 a_n，没有直接后继结点，有且仅有一个直接前趋结点 a_{n-1}；
- 其余的内部结点 a_i（2≤i≤n-1）都有且仅有一个直接前趋结点 a_{i-1} 和一个直接后继结点 a_{i+1}；
- 对于同一线性表，各数据元素 a_i 必须具有相同的数据类型，即同一线性表中各数据元素具有相同的类型，每个数据元素的长度相同。

2.2.2 线性表的基本运算

前面介绍的是线性表的逻辑结构，我们再来看一下线性表的基本数据运算。线性表的基本数据运算包括如下几个：

1. 初始化

初始化表（InitList）也就是构造一个空的线性表 L。

2. 计算表长

计算表长（ListLength）也就是计算线性表 L 中结点的个数。

3. 获取结点

获取结点（GetNode）就是取出线性表 L 中第 i 个结点的数据，这里 1≤i≤ListLength（L）。

4. 查找结点

查找结点（LocateNode）就是在线性表 L 中查找值为 x 的结点，并返回该结点在线性表 L 中的位置。如果在线性表中没有找到值为 x 的结点，则返回一个错误标志。这里需要注意的是，线性表中有可能含有多个与 x 值相同的结点，那么这个时候就返回第一次查找到的结点。

5. 插入结点

插入结点（InsertList）就是在线性表 L 的第 i 个位置上插入一个新的结点，使得其后的结点编号依次加 1。这时，插入一个新结点之后，线性表 L 的长度将变为 n+1。

6. 删除结点

删除结点（DeleteList）就是删除线性表 L 中的第 i 个结点，使得其后的所有结点编号依次减 1。这时，删除一个结点之后，线性表 L 的长度将变为 n-1。

上述这些都是一个线性表最基本的运算，当然读者根据需要还可以定义其他一些运算。

至此，我们讨论了线性表的逻辑结构和数据运算，还缺少什么？线性表的存储结构我们还没有介绍。其实，在计算机中线性表可以采用两种方法来保存，一种是顺序存储结构，另一种是链式存

储结构。对于顺序存储结构的线性表称为顺序表，而链式存储的线性表称为链表。顺序表和链表就是我们下面要介绍的内容。

2.3　顺序表结构

顺序表（Sequential List）就是按照顺序存储方式存储的线性表，该线性表的结点按照逻辑次序依次存放在计算机的一组连续的存储单元中，如图 2-1 所示。

图 2-1　顺序表的存储

由于顺序表是依次存放的，只要知道了该顺序表的首地址以及每个数据元素所占用的存储长度，那么我们就很容易计算出任何一个数据元素（也就是数据结点）的位置。

一般性，假设顺序表中所有结点的类型相同，则每个结点所占用存储空间大小亦相同，每个结点占用 c 个存储单。其中第一个单元的存储地址则是该结点的存储地址，并设顺序表中开始结点 a_1 的存储地址（简称为基地址）是 LOC（a_1），那么结点 a_i 的存储地址 LOC（a_i）可通过下式计算：

$$LOC(a_i) = LOC(a_1) + (i-1)*c \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

这就是我们能够操作顺序表进行运算的基本规则。接下来，我们便看看如何在 C 语言中建立顺序表，并完成顺序表的基本运算。

2.3.1　准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始顺序表结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在顺序表操作中需要用到的变量及数据结构等。示例代码如下：

```
static final int MAXLEN=100;                    //定义顺序表的最大长度

class DATA
{
    String key;                                 //结点的关键字
    String name;
    int age;
}                                               //定义结点

class SLType                                    //定义顺序表结构
{
    DATA[] ListData=new DATA[MAXLEN+1];         //保存顺序表的结构数组
    int ListLen;                                //顺序表已存结点的数量
}
```

这里，定义了顺序表的最大长度 MAXLEN，顺序表数据元素的类 DATA 以及顺序表的类 SLType。在类 SLType 中，ListLen 为顺序表已存结点的数量，也就是当前顺序表的长度，ListData 是一个对象数组，用来存放各个数据结点。

其实，从这里我们可以认为该顺序表是一个班级学生的记录。其中，key 为学号，name 为学生的名称，age 为年龄。

由于 Java 语言中数组都是从下标 0 开始的。在这里，为了讲述和理解的方便，我们从下标 1 开始记录数据结点，下标 0 的位置不使用。

2.3.2 初始化顺序表

在使用顺序表之前，首先要创建一个空的顺序表，也就是初始化顺序表。这里，在程序中只需设置顺序表的结点数量 ListLen 为 0 即可。这样，后面需要添加的数据元素将从顺序表的第一个位置存储。代码示例如下：

```
void SLInit(SLType SL)                    //初始化顺序表
{
    SL.ListLen=0;                         //初始化为空表
}
```

这里需要注意的是，我们并没有清空一个顺序表，读者也可以采用相应的程序代码来清空。我们只需简单地将结点数量 ListLen 设置为 0 即可，这样如果顺序表中原来已有数据，也会被覆盖，并不影响操作，反而提高了处理的速度。

2.3.3 计算顺序表长度

计算顺序表长度也就是计算线性表 L 中结点的个数。由于我们在类 SLType 中使用 ListLen 来表示顺序表的结点数量，因此程序只要返回该值就可以了。代码示例如下：

```
int SLLength(SLType SL)
{
    return (SL.ListLen);                  //返回顺序表的元素数量
}
```

2.3.4 插入结点

插入结点就是在线性表 L 的第 i 个位置上插入一个新的结点，使得其后的结点编号依次加 1。这时，插入一个新结点之后，线性表 L 的长度将变为 n+1。插入结点操作的难点在于随后的每个结点数据都要进行移动，计算量是比较大的。代码示例如下：

```
int SLInsert(SLType SL,int n,DATA data)
{
    int i;
    if(SL.ListLen>=MAXLEN)                //顺序表结点数量已超过最大数量
    {
        System.out.print("顺序表已满，不能插入结点!\n");
        return 0;                         //返回 0 表示插入不成功
    }
    if(n<1 || n>SL.ListLen-1)             //插入结点序号不正确
    {
        System.out.print("插入元素序号错误，不能插入元素！\n");
        return 0;                         //返回 0，表示插入不成功
    }
    for(i=SL.ListLen;i>=n;i--)            //将顺序表中的数据向后移动
    {
        SL.ListData[i+1]=SL.ListData[i];
    }
    SL.ListData[n]=data;                  //插入结点
    SL.ListLen++;                         //顺序表结点数量增加 1
    return 1;                             //成功插入，返回 1
}
```

这里，在程序中首先判断顺序表结点数量是否已超过最大数量，以及插入结点序号是否正确。所有条件都满足后，下面便将顺序表中的数据向后移动，同时插入结点，并更新结点数量 ListLen。

2.3.5 追加结点

追加结点并不是一个基本的数据结构运算，其可以看做插入结点的一种特殊形式，相当于在顺序表的末尾来新增加一个数据结点。由于追加结点的特殊性，其代码实现相比插入结点要简单，因为不必进行大量数据的移动，因此这里单独给出其实现的程序。代码示例如下：

```
int SLAdd(SLType SL,DATA data)                    //增加元素到顺序表尾部
{
    if(SL.ListLen>=MAXLEN)                        //顺序表已满
    {
        System.out.print("顺序表已满，不能再添加结点了！\n");
        return 0;
    }
    SL.ListData[++SL.ListLen]=data;
    return 1;
}
```

在这里，仅简单判断这个顺序表是否已经满了，然后便追加该结点，并更新结点数量 ListLen。

2.3.6 删除结点

删除结点就是删除线性表 L 中的第 i 个结点，使得其后的所有结点编号依次减 1。这时，删除一个结点之后，线性表 L 的长度将变为 n-1。删除结点和插入结点类似，都需要进行大量数据的移动。代码示例如下：

```
int SLDelete(SLType SL,int n)                     //删除顺序表中的数据元素
{
    int i;
    if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                     //删除结点序号不正确
    {
        System.out.print("删除结点序号错误，不能删除结点！\n");
        return 0;                                 //删除不成功，返回 0
    }
    for(i=n;i<SL.ListLen;i++)                     //将顺序表中的数据向前移动
    {
        SL.ListData[i]=SL.ListData[i+1];
    }
    SL.ListLen--;                                 //顺序表元素数量减 1
    return 1;                                     //成功删除，返回 1
}
```

这里首先判断待删除的结点序号是否正确，然后便开始移动数据，并更新结点数量 ListLen。

2.3.7 查找结点

查找结点就是在线性表 L 中查找值为 x 的结点，并返回该结点在线性表 L 中的位置。如果在线性表中没有找到值为 x 的结点，则返回一个错误标志。根据值 x 类型的不同，查找结点可以分为按照序号查找结点和按照关键字查找结点两种。

1. 按照序号查找结点

对于一个顺序表，序号就是数据元素在数组中的位置，也就是数组的下标标号。按照序号查找结点是顺序表查找结点最常用的方法，这是因为顺序表的存储本身就是一个数组。代码示例如下：

```
DATA SLFindByNum(SLType SL,int n)                    //根据序号返回数据元素
{
    if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                        //元素序号不正确
    {
        System.out.print("结点序号错误，不能返回结点！\n");
        return null;                                 //不成功，则返回 0
    }
    return SL.ListData[n];
}
```

2. 按照关键字查找结点

另一个比较常用的是按照关键字查找结点。这里，关键字可以是数据元素结构中的任意一项。这里我们以 key 关键字为例介绍，由前面知道 key 可以看做是学生的学号。代码示例如下：

```
int SLFindByCont(SLType SL,String key)               //按关键字查询结点
{
    int i;
    for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
    {
        if(SL.ListData[i].key.compareTo(key)==0)     //如果找到所需结点
        {
            return i;                                //返回结点序号
        }
    }
    return 0;                                        //搜索整个表后仍没有找到，则返回 0
}
```

2.3.8 显示所有结点

显示所有结点数据并不是一个数据结构基本的运算，因为其可以简单地逐个引用结点来实现。不过为了方便，这里还是将其单独列为一个方法。代码示例如下：

```
int SLAll(SLType SL)                                 //显示顺序表中的所有结点
{
    int i;
    for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
    {
        System.out.printf("(%s,%s,%d)\n",SL.ListData[i].key,SL.ListData[i].
        name,SL.ListData[i].age);
    }
    return 0;
}
```

2.3.9 顺序表操作实例

有了前面的顺序表的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对顺序表的各种操作。这里我们给出一个完整的例子，来演示顺序表的创建、插入结点、查找结点等操作。代码示例如下：

【程序 2-1】

```
import java.util.Scanner;
```

```
class DATA
{
    String key;                              //结点的关键字
    String name;
    int age;
}

class SLType                                 //定义顺序表结构
{
    static final int MAXLEN=100;
    DATA[] ListData=new DATA[MAXLEN+1];      //保存顺序表的结构数组
    int ListLen;                             //顺序表已存结点的数量

    void SLInit(SLType SL)                   //初始化顺序表
    {
        SL.ListLen=0;                        //初始化为空表
    }

    int SLLength(SLType SL)
    {
        return (SL.ListLen);                 //返回顺序表的元素数量
    }

    int SLInsert(SLType SL,int n,DATA data)
    {
        int i;
        if(SL.ListLen>=MAXLEN)               //顺序表结点数量已超过最大数量
        {
            System.out.print("顺序表已满，不能插入结点!\n");
            return 0;                        //返回 0 表示插入不成功
        }
        if(n<1 || n>SL.ListLen-1)            //插入结点序号不正确
        {
            System.out.print("插入元素序号错误，不能插入元素！ \n");
            return 0;                        //返回 0，表示插入不成功
        }
        for(i=SL.ListLen;i>=n;i--)           //将顺序表中的数据向后移动
        {
            SL.ListData[i+1]=SL.ListData[i];
        }
        SL.ListData[n]=data;                 //插入结点
        SL.ListLen++;                        //顺序表结点数量增加 1
        return 1;                            //成功插入，返回 1
    }

    int SLAdd(SLType SL,DATA data)           //增加元素到顺序表尾部
    {
        if(SL.ListLen>=MAXLEN)               //顺序表已满
        {
            System.out.print("顺序表已满，不能再添加结点了！ \n");
            return 0;
        }
        SL.ListData[++SL.ListLen]=data;
        return 1;
    }
```

```
    int SLDelete(SLType SL,int n)                   //删除顺序表中的数据元素
    {
        int i;
        if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                   //删除结点序号不正确
        {
            System.out.print("删除结点序号错误，不能删除结点！\n");
            return 0;                               //删除不成功，返回0
        }
        for(i=n;i<SL.ListLen;i++)                   //将顺序表中的数据向前移动
        {
            SL.ListData[i]=SL.ListData[i+1];
        }
        SL.ListLen--;                               //顺序表元素数量减1
        return 1;                                   //成功删除，返回1
    }

    DATA SLFindByNum(SLType SL,int n)               //根据序号返回数据元素
    {
        if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                   //元素序号不正确
        {
            System.out.print("结点序号错误，不能返回结点！\n");
            return null;                            //不成功，则返回0
        }
        return SL.ListData[n];
    }

    int SLFindByCont(SLType SL,String key)          //按关键字查询结点
    {
        int i;
        for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
        {
            if(SL.ListData[i].key.compareTo(key)==0)    //如果找到所需结点
            {
                return i;                           //返回结点序号
            }
        }
        return 0;                                   //搜索整个表后仍没有找到，则返回0
    }

    int SLAll(SLType SL)                            //显示顺序表中的所有结点
    {
        int i;
        for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
        {
            System.out.printf("(%s,%s,%d)\n",SL.ListData[i].key,SL.ListData[i].
            name,SL.ListData[i].age);
        }
        return 0;
    }
}

public class P2_1 {

    public static void main(String[] args) {
        int i;
```

```
        SLType SL=new SLType();                         //定义顺序表变量
        DATA pdata;                                     //定义结点保存引用变量
        String key;                                     //保存关键字

        System.out.print("顺序表操作演示!\n");

        SL.SLInit(SL);                                  //初始化顺序表
        System.out.print("初始化顺序表完成!\n");

        Scanner input=new Scanner(System.in);

        do
        {                                               //循环添加结点数据
            System.out.print("输入添加的结点(学号 姓名 年龄): ");
            DATA data=new DATA();
            data.key=input.next();
            data.name=input.next();
            data.age=input.nextInt();

            if(data.age!=0)                             //若年龄不为 0
            {
                if(SL.SLAdd(SL,data)==0)                //若添加结点失败
                {
                    break;                              //退出死循环
                }
            }
            else                                        //若年龄为 0
            {
                break;                                  //退出死循环
            }
        }while(true);
        System.out.print("\n 顺序表中的结点顺序为: \n");
        SL.SLAll(SL);                                   //显示所有结点数据


        System.out.print("\n 要取出结点的序号: ");
        i=input.nextInt();                              //输入结占点序号
        pdata=SL.SLFindByNum(SL,i);                     //按序号查找结点
        if(pdata!=null)                                 //若返回的结点引用不为 null
        {
            System.out.printf("第%d 个结点为: (%s,%s,%d)\n",i,pdata.key,pdata.name,
            pdata.age);
        }


        System.out.print("\n 要查找结点的关键字: ");
        key=input.next();                               //输入关键字
        i=SL.SLFindByCont(SL,key);                      //按关键字查找 , 返回结点序号
        pdata=SL.SLFindByNum(SL,i);                     //按序号查询, 返回结点引用
        if(pdata!=null)                                 //若结点引用不为 null
        {
            System.out.printf("第%d 个结点为: (%s,%s,%d)\n",i,pdata.key,pdata.name,
            pdata.age);
        }


    }
}
```

在这里，main()主方法首先初始化顺序表，然后循环添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来显示所有的结点数据，并分别按照序号和关键字来进行结点的查找。该程序执行结果，如图 2-2 所示。

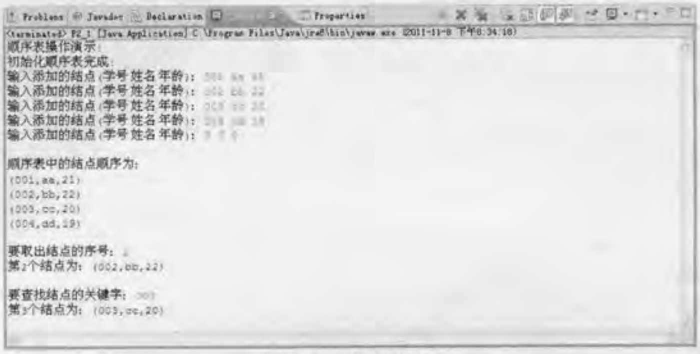


图 2-2 执行结果

2.4 链 表 结 构

顺序表结构的存储方式非常容易理解，操作也十分方便。但是顺序表结构有如下一些缺点：

- 在插入或者删除结点的时候，往往需要移动大量的数据。
- 如果表比较大，有时比较难分配足够的连续存储空间，往往导致内存分配失败，而无法存储。

为了克服以上顺序表结构的缺点，我们可以采用链表结构。链表结构是一种动态存储分配的结构形式，可以根据需要动态申请所需的内存单元。

2.4.1 什么是链表结构

典型的链表结构，如图 2-3 所示。链表中每个结点都应包括如下两个部分：

- 数据部分，保存的是该结点的实际数据。
- 地址部分，保存的是下一个结点的地址。

链表结构就是由许多这种结点构成的。在进行链表操作时，首先需要定义一个“头引用”变量（一般以 head 表示），该引用变量指向链表结构的第一个结点，第一个结点的地址部分又指向第二个结点……，直到最后一个结点。最后一个结点不再指向其他结点，称为“表尾”，一般在表尾的地址部分放一个空地址“null”，链表到此结束。从链表结构图可以看出，整个存储过程十分类似于一条长链，因此形象地称之为链表结构，或者链式结构。

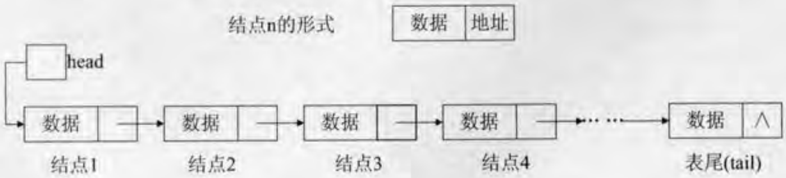


图 2-3 链表结构

由于，这里采用了引用来指示下一个数据的地址。因此在链表结构中，逻辑上相邻的结点在内

存中并不一定相邻，逻辑相邻关系通过地址部分的引用变量来实现。

链表结构带来的最大好处便是结点之间不要求连续存放，因此在保存大量数据的时候，不需要分配一块连续的存储空间。用户可以用 new 函数动态分配结点的存储空间，当删除某个结点时，给该节点赋值“null”，释放其占用的内存空间。

当然，链表结构也有缺点，那就是浪费存储空间。因此，对于每个节点数据，都要额外保存一个引用变量。但是，在某些场合，链表结构所带来的好处还是大于其缺点的。

对于链表的访问只能从表头逐个查找，即通过 head 头引用找到第一个结点，再从第一个结点找到第二个结点，……这样逐个比较一直到找到需要的结点为止，而不能像顺序表那样进行随机访问。

链式存储是最常用的存储方式之一，它不仅可用来表示线性表，而且可用来表示各种非线性的数据结构。链表结构还可以细分为如下几类：

- 单链表：向上面的链式结构一样，每个结点中只包含一个引用。
- 双向链表：若每个结点包含两个引用，一个指向下一个结点，另一个指向上一个结点，这就是双向链表。
- 单循环链表：在单链表中，将终端结点的引用域 null 改为指向表头结点或开始结点即可构成单循环链表。
- 多重链的循环链表：如果将表中结点链在多个环上，将构成多重链的循环链表。

接下来，我们便看看如何在 Java 语言中建立链表，并完成链表结构的基本运算。

2.4.2 准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始链表结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在链表操作中需要用到的变量及类等。示例代码如下：

```
class DATA2
{
    String key;                          //结点的关键字
    String name;
    int age;
}                                        //数据结点类型
class CLType                             //定义链表结构
{
    DATA2 nodeData=new DATA2();
    CLType nextNode;
}
```

这里，定义了链表数据元素的类 DATA2 以及链表的类 CLType。结点的具体数据保存在一个类 DATA2 中，而引用 nextNode 用来指向下一个结点。

其实，从这里我们可以认为该链表是一个班级学生的记录，和上面顺序表所完成的工作类似。其中，key 为学号，name 为学生的名称，age 为年龄。

2.4.3 追加结点

追加结点就是在链表末尾增加一个结点。表尾结点的地址部分原来保存的是空地址 null，此时需将其设置为新增结点的地址（即原表尾结点指向新增结点），然后将新增结点的地址部分设置为空地址 null，即新增结点成为表尾。

由于一般情况下，链表只有一个头引用 head，要在末尾添加结点就需要从头引用 head 开始逐个检查，直到找到最后一个结点（即表尾）。

典型的追加结点的过程，如图 2-4 所示。追加结点的操作步骤如下：

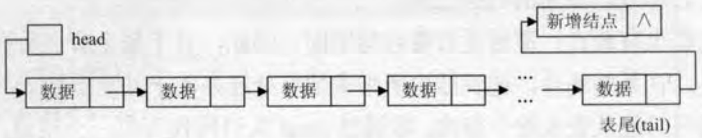


图 2-4　追加结点

（1）首先分配内存空间，保存新增的结点。

（2）从头引用 head 开始逐个检查，直到找到最后一个结点（即表尾）。

（3）将表尾结点的地址设置为新增结点的地址。

（4）将新增结点的地址部分设置为空地址 null，即新增结点成为表尾。

在链表结构中追加结点的代码示例如下：

```
CLType CLAddEnd(CLType head,DATA2 nodeData)          //追加结点
{
    CLType node,htemp;
    if((node=new CLType())==null)
    {
        System.out.print("申请内存失败！\n");
        return null;                                 //分配内存失败
    }
    else
        {
            node.nodeData=nodeData;                  //保存数据
            node.nextNode=null;                      //设置结点引用为空，即为表尾
            if(head==null)                           //头引用
            {
                head=node;
                return head;
            }
            htemp=head;
            while(htemp.nextNode!=null)              //查找链表的末尾
            {
                htemp=htemp.nextNode;
            }
            htemp.nextNode=node;
            return head;
        }
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 nodeData 为结点保存的数据。程序中，使用 new 关键字申请保存结点数据的内存空间，如果分配内存成功，node 中将保存指向该内存区域的引用。然后，将传入的 nodeData 保存到申请的内存区域，并设置该结点指向下一结点的引用值为 null。

2.4.4　插入头结点

插入头结点就是在链表首部添加结点的过程。插入头结点的过程，如图 2-5 所示。插入头结点的步骤如下：

（1）分配内存空间，保存新增的结点。

（2）使新增结点指向头引用 head 所指向的结点。

（3）使头引用 head 指向新增结点。

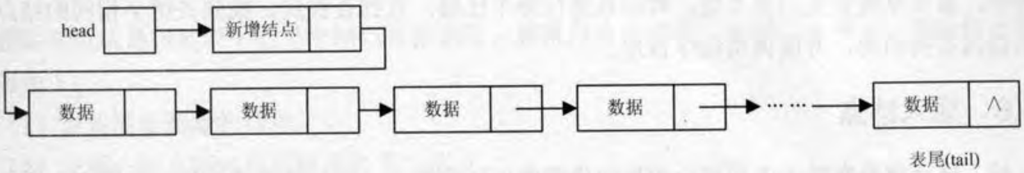


图 2-5　插入头结点

插入头结点的代码示例如下：

```
CLType CLAddFirst(CLType head,DATA2 nodeData)
{
    CLType node;
    if((node=new CLType())==null)
    {
        System.out.print("申请内存失败！\n");
        return null;                                //分配内存失败
    }
    else
    {
        node.nodeData=nodeData;                     //保存数据
        node.nextNode=head;                         //指向头引用所指结点
        head=node;                                  //头引用指向新增结点
        return head;
    }
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 nodeData 为结点保存的数据。程序中首先使用 new 关键字申请保存结点数据的内存空间，如果分配内存成功，node 中将保存指向该内存区域的引用。然后，将传入的 nodeData 保存到申请的内存区域，并使新增结点指向头引用 head 所指向的结点，然后设置头引用 head 重新指向新增结点。

2.4.5　查找结点

查找结点就是在链表结构中查找需要的元素。对于链表结构来说，一般可通过关键字进行查询。查找结点的示例代码如下：

```
CLType CLFindNode(CLType head,String key)            //查找结点
{
    CLType htemp;
    htemp=head;                                      //保存链表头引用
    while(htemp!=null)                               //若结点有效，则进行查找
    {
        if(htemp.nodeData.key.compareTo(key)==0)     //若结点关键字与传入关键字相同
        {
            return htemp;                            //返回该结点引用
        }
        htemp=htemp.nextNode;                        //处理下一结点
```

```
    }
    return null;                                    //返回空引用
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 key 是用来在链表中进行查找结点的关键字。程序中，首先从链表头引用开始，对结点进行逐个比较，直到查找到。找到关键字相同的结点后，返回该结点的引用，方便调用程序处理。

2.4.6 插入结点

插入结点就是在链表中间部分的指定位置增加一个结点。插入结点的过程，如图 2-6 所示。插入结点的操作步骤如下：

（1）分配内存空间，保存新增的结点。

（2）找到要插入的逻辑位置，也就是位于哪两个结点之间。

（3）修改插入位置结点的引用，使其指向新增结点，而使新增结点指向原插入位置所指向的结点。

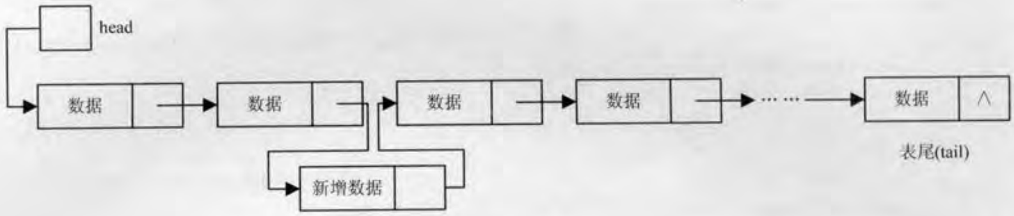


图 2-6　插入结点

在链表结构中插入结点的代码示例如下：

```
CLType CLInsertNode(CLType head,String findkey,DATA2 nodeData)    //插入结点
{
    CLType node,nodetemp;
    if((node=new CLType())==null)                                 //分配保存结点的内容
    {
        System.out.print("申请内存失败！\n");
        return null;                                              //分配内存失败
    }
    node.nodeData=nodeData;                                       //保存结点中的数据
    nodetemp=CLFindNode(head,findkey);
    if(nodetemp!=null)                                            //若找到要插入的结点
    {
        node.nextNode=nodetemp.nextNode;                          //新插入结点指向关键结点的下一结点
        nodetemp.nextNode=node;                                   //设置关键结点指向新插入结点
    }
    else
    {
        System.out.print("未找到正确的插入位置！\n");
    }
    return head;                                                  //返回头引用
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 findkey 是用来在链表中进行查找的结点关键字，找到该结点后将在该结点后面添加结点数据，nodeData 为新增结点的数据。程序中首先使用 new

关键字申请保存结点数据的内存空间，然后调用方法 ChainListFind 查找指定关键字的结点，接着执行插入操作。

2.4.7　删除结点

删除结点就是将链表中的某个结点数据删除。删除结点的过程，如图 2-7 所示。删除结点的操作步骤如下：

（1）查找需要删除的结点。

（2）使前一结点指向当前结点的下一结点。

（3）删除结点。

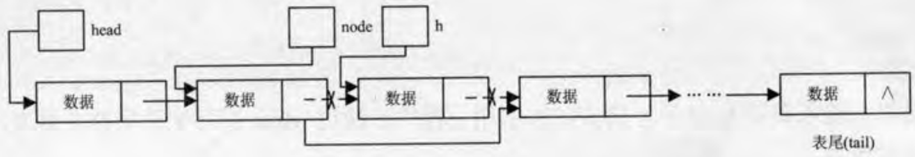


图 2-7　删除结点

在链表结构中删除结点的代码示例如下：

```
int CLDeleteNode(CLType head,String key)
{
    CLType node,htemp;                          //node 保存删除结点的前一结点
    htemp=head;
    node=head;
     while(htemp!=null)
     {
        if(htemp.nodeData.key.compareTo(key)==0)        //找到关键字，执行删除操作
        {
            node.nextNode=htemp.nextNode;               //使前一结点指向当前结点的下一结点
            htemp=null;                                 //释放内存
            return 1;
        }
        else
        {
            node=htemp;                                 //指向当前结点
            htemp=htemp.nextNode;                       //指向下一结点
        }
    }
    return 0;                                           //未删除
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 key 表示一个关键字，是链表中需要删除结点的关键字。程序中，通过一个循环，按关键字在整个链表中查找要删除的结点。如果找到被删除结点，则设置上一结点（node 引用所指结点）指向当前结点（h 引用所指结点）的下一结点，即可完成链表中结点的逻辑删除。但是，此时被删除结点仍然保存在内存中，接着执行赋值 null 操作，用来释放被删除节点所占用的内存空间。

2.4.8　计算链表长度

计算链表长度也就是统计链表结构中结点的数量。在顺序表中比较方便，但是在这里，由于链

表结构在物理上并不是连续存储的。因此，计算链表长度稍复杂些，需要遍历整个链表来对结点数量进行累加得到。

计算链表长度的代码示例如下：

```
int CLLength(CLType head)                               //计算链表长度
{
    CLType htemp;
    int Len=0;
    htemp=head;
    while(htemp!=null)                                  //遍历整个链表
    {
        Len++;                                          //累加结点数量
        htemp=htemp.nextNode;                           //处理下一结点
    }
    return Len;                                         //返回结点数量
}
```

在这里，输入参数 head 表示链表的头引用。程序中通过 while 循环来遍历整个链表，从而累加结点数量并返回。

2.4.9 显示所有结点

显示所有结点数据并不是一个数据结构基本的运算，因为其可以简单地逐个引用结点来实现。不过为了方便，这里将其单独列为一个方法。代码示例如下：

```
void CLAllNode(CLType head)                             //遍历链表
{
    CLType htemp;
    DATA2 nodeData;
    htemp=head;
    System.out.printf("当前链表共有%d 个结点。链表所有数据如下：\n",CLLength(head));
    while(htemp!=null)                                  //循环处理链表每个结点
    {
        nodeData=htemp.nodeData;                        //获取结点数据
        System.out.printf("结点(%s,%s,%d)\n",nodeData.key,nodeData.name,nodeData.age);
        htemp=htemp.nextNode;                           //处理下一结点
    }
}
```

这里，输入参数 head 表示链表的头引用。程序中通过 while 循环来遍历整个链表，从而输出各个结点数据。

2.4.10 链表操作实例

有了前面的链表的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对链表的各种操作。这里我们给出一个完整的例子，来演示链表的创建、插入结点、查找结点、删除结点等操作。代码示例如下：

【程序 2-2】

```
import java.util.Scanner;


class DATA2
{
```

```
    String key;                                         //结点的关键字
    String name;
    int age;
}

class CLType                                            //定义链表结构
{
    DATA2 nodeData=new DATA2();
    CLType nextNode;

    CLType CLAddEnd(CLType head,DATA2 nodeData)         //追加结点
    {
        CLType node,htemp;
        if((node=new CLType())==null)
        {
            System.out.print("申请内存失败！ \n");
            return null;                                //分配内存失败
        }
        else
        {
            node.nodeData=nodeData;                     //保存数据
            node.nextNode=null;                         //设置结点引用为空，即为表尾
            if(head==null)                              //头引用
            {
                head=node;
                return head;
            }
            htemp=head;
            while(htemp.nextNode!=null)                 //查找链表的末尾
            {
                htemp=htemp.nextNode;
            }
            htemp.nextNode=node;
            return head;
        }
    }

    CLType CLAddFirst(CLType head,DATA2 nodeData)
    {
        CLType node;
        if((node=new CLType())==null)
        {
            System.out.print("申请内存失败！ \n");
            return null;                                //分配内存失败
        }
        else
        {
            node.nodeData=nodeData;                     //保存数据
            node.nextNode=head;                         //指向头引用所指结点
            head=node;                                  //头引用指向新增结点
            return head;
        }
    }

    CLType CLFindNode(CLType head,String key)           //查找结点
```

```
    {
        CLType htemp;
        htemp=head;                                     //保存链表头引用
        while(htemp!=null)                              //若结点有效，则进行查找
        {
            if(htemp.nodeData.key.compareTo(key)==0)    //若结点关键字与传入关键字相同
            {
                return htemp;                           //返回该结点引用
            }
            htemp=htemp.nextNode;                       //处理下一结点
        }
        return null;                                    //返回空引用
    }

    CLType CLInsertNode(CLType head,String findkey,DATA2 nodeData)    //插入结点
    {
        CLType node,nodetemp;
        if((node=new CLType())==null)                   //分配保存结点的内容
        {
            System.out.print("申请内存失败！\n");
            return null;                                //分配内存失败
        }
        node.nodeData=nodeData;                         //保存结点中的数据
        nodetemp=CLFindNode(head,findkey);
        if(nodetemp!=null)                              //若找到要插入的结点
        {
            node.nextNode=nodetemp.nextNode;            //新插入结点指向关键结点的下一结点
            nodetemp.nextNode=node;                     //设置关键结点指向新插入结点
        }
        else
        {
            System.out.print("未找到正确的插入位置！\n");
//              free(node);                             //释放内存
        }
        return head;                                    //返回头引用
    }

    int CLDeleteNode(CLType head,String key)
    {
        CLType node,htemp;                              //node 保存删除结点的前一结点
        htemp=head;
        node=head;
        while(htemp!=null)
        {
            if(htemp.nodeData.key.compareTo(key)==0)    //找到关键字，执行删除操作
            {
                node.nextNode=htemp.nextNode;           //使前一结点指向当前结点的下一结点
//                  free(htemp);                        //释放内存
                return 1;
            }
            else
            {
                node=htemp;                             //指向当前结点
                htemp=htemp.nextNode;                   //指向下一结点
            }
```

```
        }
        return 0;                                       //未删除
    }

    int CLLength(CLType head)                          //计算链表长度
    {
        CLType htemp;
        int Len=0;
        htemp=head;
        while(htemp!=null)                             //遍历整个链表
        {
            Len++;                                     //累加结点数量
            htemp=htemp.nextNode;                      //处理下一结点
        }
        return Len;                                    //返回结点数量
    }

    void CLAllNode(CLType head)                        //遍历链表
    {
        CLType htemp;
        DATA2 nodeData;
        htemp=head;
        System.out.printf("当前链表共有%d 个结点。链表所有数据如下：\n",CLLength(head));
        while(htemp!=null)                             //循环处理链表每个结点
        {
            nodeData=htemp.nodeData;                   //获取结点数据
            System.out.printf("结点(%s,%s,%d)\n",nodeData.key,nodeData.name,nodeData.age);
            htemp=htemp.nextNode;                      //处理下一结点
        }
    }

}

public class P2_2 {

    public static void main(String[] args) {
        CLType node, head=null;
        CLType CL=new CLType();
        String key,findkey;
        Scanner input=new Scanner(System.in);

        System.out.print("链表测试。先输入链表中的数据，格式为：关键字 姓名 年龄\n");
        do
        {
            DATA2 nodeData=new DATA2();
            nodeData.key=input.next();
            if(nodeData.key.equals("0"))
            {
                break;                                 //若输入 0，则退出
            }
            else
            {
                nodeData.name=input.next();
                nodeData.age=input.nextInt();
                head=CL.CLAddEnd(head,nodeData);       //在链表尾部添加结点
```

```
            }
        }while(true);
        CL.CLAllNode(head);                                          //显示所有结点

        System.out.printf("\n 演示插入结点，输入插入位置的关键字：");
        findkey=input.next();                                        //输入插入位置关键字
        System.out.print("输入插入结点的数据(关键字 姓名 年龄):");
        DATA2 nodeData=new DATA2();
        nodeData.key=input.next();
        nodeData.name=input.next();
        nodeData.age=input.nextInt();//输入插入结点数据
        head=CL.CLInsertNode(head,findkey,nodeData);   //调用插入函数
        CL.CLAllNode(head);                                          //显示所有结点

        System.out.print("\n 演示删除结点，输入要删除的关键字:");

        key=input.next();                                            //输入删除结点关键字
        CL.CLDeleteNode(head,key);                                   //调用删除结点函数
        CL.CLAllNode(head);                                          //显示所有结点

        System.out.printf("\n 演示在链表中查找，输入查找关键字:");
        key=input.next();                                            //输入查找关键字
        node=CL.CLFindNode(head,key);                                //调用查找函数，返回结点引用
        if(node!=null)                                               //若返回结点引用有效
        {
            nodeData=node.nodeData;                                  //获取结点的数据
            System.out.printf("关键字%s 对应的结点为(%s,%s,%d)\n" ,key,nodeData.key,
            nodeData.name,nodeData.age);
        }
        else                                                         //若结点引用无效
        {
            System.out.printf("在链表中未找到关键字为%s 的结点！\n",key);
        }

    }

}
```

在这里，main()主方法首先初始化链表，然后循环添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来显示所有的结点数据，然后分别演示了插入结点、删除结点和查找结点等操作。该程序执行结果，如图 2-8 所示。

图 2-8　执行结果

2.5 栈 结 构

在程序设计中，读者一定接触过"堆栈"的概念。其实，"栈"和"堆"是两个不同的概念。这里，栈是一种特殊的数据结构，在中断处理特别是重要数据的现场保护有着重要意义。

2.5.1 什么是栈结构

栈结构是从数据的运算来分类的，也就是说栈结构具有特殊的运算规则。而从数据的逻辑结构来看，栈结构其实就是一种线性结构。如果从数据的存储结构来进一步划分，栈结构包括两类：

- 顺序栈结构：即使用一组地址连续的内存单元依次保存栈中的数据。在程序中，可以定义一个指定大小的结构数组来作为栈，序号为 0 的元素就是栈底，再定义一个变量 top 保存栈顶的序号即可。
- 链式栈结构：即使用链表形式保存栈中各元素的值。链表首部（head 引用所指向元素）为栈顶，链表尾部（指向地址为 null）为栈底。

典型的栈结构，如图 2-9 所示。从图中可以看出，在栈结构中只能在一端进行操作，该操作端称为栈顶，另一端称为栈底。也就是说，保存和取出数据都只能从栈结构的一端进行。从数据的运算角度来分析，栈结构是按照"后进先出"（Last In Firt Out，LIFO）的原则处理结点数据的。

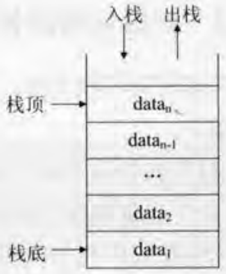


图 2-9　栈结构

其实，栈结构在日常生活中有很多生动的例子。例如，当仓库中堆放货物时，先来的货物放在里面，后来的货物码放在外面；而要取出货物时，总是先取外面的，最后才能取到里面放的货物。也就是说，后放入货物先取出。

在计算机程序设计中，特别是汇编程序中，栈通常用于中断或者子程序调用过程。此时，首先将重要的寄存器或变量压入栈，然后进入中断例程或者子程序，处理完后，通过出栈操作恢复寄存器和变量的值。

在栈结构中，只有栈顶元素是可以访问的。这样，栈结构的数据运算非常简单。一般栈结构的基本操作有两个：

- 入栈（Push）：将数据保存到栈顶的操作。进行入栈操作前，先修改栈顶引用，使其向上移一个元素位置，然后将数据保存到栈顶引用所指的位置。
- 出栈（Pop）：将栈顶的数据弹出的操作。通过修改栈顶引用，使其指向栈中的下一个元素。

接下来，了解如何在 Java 语言中建立顺序栈，并完成顺序栈结构的基本运算。

2.5.2 准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始栈结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在栈操作中需要用到的变量及类等。示例代码如下：

```
static final int MAXLEN=50;

class DATA3
```

```
	{
		String name;
		int age;
	}

	class StackType
	{
		static final int MAXLEN=50;
		DATA3[] data=new DATA3[MAXLEN+1];			//数据元素
		int top;						//栈顶
	}
```

这里，定义了栈结构的最大长度 MAXLEN，栈结构数据元素的类 DATA 以及栈结构的类 StackType。在类 StackType 中，data 为数据元素，top 为栈顶的序号。当 top=0 时表示栈为空，当 top=SIZE 时表示栈满。

由于 Java 语言中数组都是从下标 0 开始的。在这里，为了讲述和理解的方便，我们从下标 1 开始记录数据结点，下标 0 的位置不使用。

2.5.3 初始化栈结构

在使用顺序栈之前，首先要创建一个空的顺序栈，也就是初始化顺序栈。顺序栈的初始化操作步骤如下：

（1）按符号常量 SIZE 指定的大小申请一片内存空间，用来保存栈中的数据。

（2）设置栈顶引用的值为 0，表示是一个空栈。

初始化顺序栈的代码示例如下：

```
	StackType STInit()
	{
		StackType p;

		if((p=new StackType())!=null)			//申请栈内存
		{
			p.top=0;				//设置栈顶为 0
			return p;				//返回指向栈的引用
		}
		return null;
	}
```

在这里，首先使用 new 关键字申请内存，申请成功后设置栈顶为 0，然后返回申请内存的首地址。如果申请内存失败，将返回 null。

2.5.4 判断空栈

判断空栈就是判断一个栈结构是否为空。如果是空栈，则表示该栈结构中没有数据。此时可以进行入栈操作，但不可以进行出栈操作。

判断空栈的代码示例如下：

```
	boolean STIsEmpty(StackType s)			//判断栈是否为空
	{
		boolean t;
		t=(s.top==0);
		return t;
	}
```

在这里，输入参数 s 为是一个指向操作的栈的引用。程序中，根据栈顶引用 top 是否为 0，判断栈是否为空。

2.5.5 判断满栈

判断满栈就是判断一个栈结构是否为满。如果是满栈，则表示该栈结构中没有多余的空间来保存额外数据。此时不可以进行入栈操作，但是可以进行出栈操作。

判断满栈的代码示例如下：

```
boolean STIsFull(StackType s)                    //判断栈是否已满
{
    boolean t;
    t=(s.top==MAXLEN);
    return t;
}
```

在这里，输入参数 s 为一个指向操作的栈的引用。程序中，判断栈顶引用 top 是否等于符号常量 MAXLEN，从而判断栈是否已满。

2.5.6 清空栈

清空栈就是栈中的所有数据清除。清空栈的代码示例如下：

```
void STClear(StackType s)                        //清空栈
{
    s.top=0;
}
```

在这里，输入参数 s 是一个指向操作的栈的引用。在程序中，简单地将栈顶引用 top 设置为 0，表示执行清空栈操作。

2.5.7 释放空间

释放空间是释放栈结构所占用的内存单元。由前面知道，在初始化栈结构时，使用了 malloc 函数分配内存空间。虽然，我们可以使用清空栈操作。但是清空栈操作并没有释放内存空间，这就需要使用 free 函数释放所分配的内存。

释放空间的代码示例如下：

```
void STFree(StackType s)                         //释放栈所占用空间
{
    if(s!=null)
    {
        s=null;
    }
}
```

在这里，输入参数 s 是一个指向操作的栈的引用。程序中，直接赋值 null 操作释放所分配的内存。一般在不需要使用栈结构的时候使用，特别是程序结束时。

2.5.8 入栈

入栈（Push）是栈结构的基本操作，主要操作是将数据元素保存到栈结构。入栈操作的具体步骤如下：

（1）首先判断栈顶 top，如果 top 大于等于 SIZE，则表示溢出，进行出错处理；否则执行以下操作。

（2）设置 top=top+1（栈顶引用加 1，指向入栈地址）。

（3）将入栈元素保存到 top 指向的位置。

入栈操作的代码示例如下：

```
int PushST(StackType s,DATA3 data)                    //入栈操作
{
    if((s.top+1)>MAXLEN)
    {
        System.out.print("栈溢出!\n");
        return 0;
    }
    s.data[++s.top]=data;                             //将元素入栈
    return 1;
}
```

在这里，输入参数 s 是一个指向操作的栈的引用，输入参数 data 是需要入栈的数据元素。程序中首先判断栈是否溢出，如果溢出则不进行入栈操作；否则修改栈顶引用的值，再将元素入栈。

2.5.9 出栈

出栈（Pop）是栈结构的基本操作，主要操作与入栈相反，其是从栈顶弹出一个数据元素。出栈操作的具体步骤如下：

（1）判断栈顶 top，如果 top 等于 0，则表示为空栈，进行出错处理；否则，执行下面的步骤。

（2）将栈顶引用 top 所指位置的元素返回。

（3）设置 top=top-1，也就是使栈顶引用减 1，指向栈的下一个元素，原来栈顶元素被弹出。

```
DATA3 PopST(StackType s)                              //出栈操作
{
    if(s.top==0)
    {
        System.out.print("栈为空!\n");
        System.exit(0);
    }
    return (s.data[s.top--]);
}
```

在这里，输入参数 s 是一个指向操作的栈的引用。该函数返回值是一个 DATA3 类型的数据，返回值是栈顶的数据元素。

2.5.10 读结点数据

读结点数据也就是读取栈结构中结点的数据。由于栈结构只能在一端进行操作，因此这里的读操作其实就是读的栈顶的数据。

需要注意的是，读结点数据的操作和出栈操作不同。读结点数据的操作仅是显示栈顶结点数据的内容，而出栈操作则将栈顶数据弹出，该数据不再存在了。

读结点数据的代码示例如下：

```
DATA3 PeekST(StackType s)                             //读栈顶数据
```

```
{
        if(s.top==0)
        {
            System.out.printf("栈为空!\n");
            System.exit(0);
        }
        return (s.data[s.top]);
}
```

在这里，输入参数 s 是一个指向操作的栈的引用。该方法返回值同样是一个 DATA3 类型的数据，返回值是栈顶的数据元素。

2.5.11　栈结构操作实例

有了前面的栈结构的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对栈结构的各种操作。这里给出一个完整的例子，来演示栈结构的创建、入栈和出栈等操作。代码示例如下：

【程序 2-3】

```
import java.util.Scanner;

class DATA3
{
    String name;
    int age;
}

class StackType
{
    static final int MAXLEN=50;
    DATA3[] data=new DATA3[MAXLEN+1];             //数据元素
    int top;                                      //栈顶

    StackType STInit()
    {
    StackType p;

        if((p=new StackType())!=null)             //申请栈内存
        {
            p.top=0;                              //设置栈顶为 0
            return p;                             //返回指向栈的引用
        }
        return null;
    }

    boolean STIsEmpty(StackType s)                //判断栈是否为空
    {
        boolean t;
        t=(s.top==0);
        return t;
    }

    boolean STIsFull(StackType s)                 //判断栈是否已满
    {
        boolean t;
        t=(s.top==MAXLEN);
        return t;
```

```
	}

	void STClear(StackType s)					//清空栈
	{
		s.top=0;
	}

	void STFree(StackType s)					//释放栈所占用空间
	{
		if(s!=null)
		{
			s=null;
		}
	}

	int PushST(StackType s,DATA3 data)			//入栈操作
	{
		 if((s.top+1)>MAXLEN)
		 {
			 System.out.print("栈溢出!\n");
			 return 0;
		 }
		 s.data[++s.top]=data;					//将元素入栈
		 return 1;
	}

	DATA3 PopST(StackType s)					//出栈操作
	{
		 if(s.top==0)
		 {
			 System.out.print("栈为空!\n");
			 System.exit(0);
		 }
		 return (s.data[s.top--]);
	}

	DATA3 PeekST(StackType s)					//读栈顶数据
	{
		 if(s.top==0)
		 {
			 System.out.printf("栈为空!\n");
			 System.exit(0);
		 }
		 return (s.data[s.top]);
	}
}

public class P2_3 {
	public static void main(String[] args) {
		StackType st=new StackType();
		DATA3 data1=new DATA3();

		StackType stack=st.STInit();			//初始化栈
		Scanner input=new Scanner(System.in);
		System.out.print("入栈操作：\n");
		System.out.println("输入姓名 年龄进行入栈操作:");
		do
```

```
            {
                DATA3 data=new DATA3();
                data.name=input.next();

                if(data.name.equals("0"))
                {
                    break;                                  //若输入 0，则退出
                }
                else
                {
                    data.age=input.nextInt();
                    st.PushST(stack,data);
                }
            }while(true);
            String temp="1";
            System.out.println("出栈操作:按任意非 0 键进行出栈操作:");
            temp=input.next();
            while(!temp.equals("0"))
            {
                data1=st.PopST(stack);
                System.out.printf("出栈的数据是(%s,%d)\n" ,data1.name,data1.age);
                temp=input.next();
            }
            System.out.println("测试结束！");
            st.STFree(st);                                  //释放栈所占用的空间
        }
    }
```

在这里，main()主方法首先初始化栈结构，然后循环进行入栈操作，添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来，用户每按一次按键，则进行一次出栈操作，显示结点数据。当为空栈的时候，退出程序。然该程序执行结果，如图 2-10 所示。

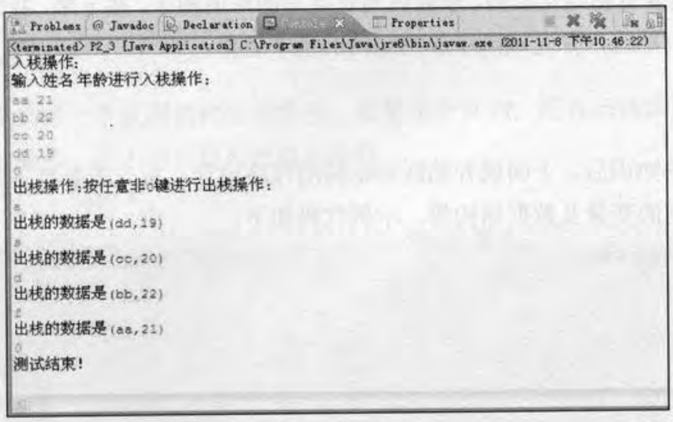


图 2-10　执行结果

2.6　队列结构

在程序设计中，队列结构也是一种常用的数据结构。队列结构和栈结构类似，其在现实生活中都有对应的例子，可以说是来源于生活的数据结构。

2.6.1 什么是队列结构

队列结构是从数据的运算来分类的，也就是说队列结构具有特殊的运算规则。而从数据的逻辑结构来看，队列结构其实就是一种线性结构。如果从数据的存储结构来进一步划分，队列结构包括两类：

- 顺序队列结构：即使用一组地址连续的内存单元依次保存队列中的数据。在程序中，可以定义一个指定大小的结构数组作为队列。
- 链式队列结构：即使用链表形式保存队列中各元素的值。

典型的队列结构，如图 2-11 所示。从图中可以看出，在队列结构中允许对两端进行操作，但是两端的操作不同。在表的一端只能进行删除操作，称为队头；在表的另一端只能进行插入操作，称为队尾。如果队列中没有数据元素，则称为空队列。

从数据的运算角度来分析，队列结构是按照“先进先出”（First In First Out，FIFO）的原则处理结点数据的。

图 2-11　队列结构

其实，队列结构在日常生活中有很多生动的例子。例如银行的电子排号系统，先来的人取的号靠前，后来的人取的号靠后。这样，先来的人将最先得到服务，后来的人将后得到服务，一切按照“先来先服务”的原则。

在硬件的存储类芯片中，有一类根据队列结构构造的芯片，那就是 FIFO 芯片。这类芯片具有一定的容量，保留了一端作为数据的存入，另一端作为数据的读出。先存入的数据将先被读出。

在队列结构中，数据运算非常简单。一般队列结构的基本操作只有两个：

- 入队列：将一个元素添加到队尾（相当于到队列最后排队等候）。
- 出队列：将队头的元素取出，同时删除该元素，使后一个元素成为队头。

除此之外，还需要有初始化队列、获取队列长度等简单的操作。接下来，我们便看看如何在 Java 语言中建立顺序队列结构，并完成顺序队列结构的基本运算。

2.6.2 准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始队列结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在队列操作中需要用到的变量及数据结构等。示例代码如下：

```
static final int QUEUELEN=15;

class DATA4
{
    String name;
    int age;
}

class SQType
{
    DATA4[] data=new DATA4[QUEUELEN];          //队列数组
    int head;                                  //队头
    int tail;                                  //队尾
}
```

这里，定义了队列结构的最大长度 QUEUELEN，队列结构数据元素的类 DATA4 以及队列结构的类 SQType。在类 SQType 中，data 为数据元素，head 为队头的序号，tail 为队尾的序号。当 head=0 时表示队列为空，当 tail=QUEUELEN 时表示队列已满。

2.6.3 初始化队列结构

在使用顺序队列之前，首先要创建一个空的顺序队列，也就是初始化顺序队列。顺序队列的初始化操作步骤如下：

（1）按符号常量 QUEUELEN 指定的大小申请一片内存空间，用来保存队列中的数据。

（2）设置 head=0 和 tail=0，表示是一个空栈。

初始化顺序队列的代码示例如下；

```
SQType SQTypeInit()
{
    SQType q;
    if((q=new SQType())!=null)                          //申请内存
    {
        q.head = 0;                                     //设置队头
        q.tail = 0;                                     //设置队尾
        return q;
    }
    else
    {
        return null;                                    //返回空
    }
}
```

在这里，首先使用 new 关键字申请内存，申请成功后设置队头和队尾，然后返回申请内存的首地址。如果申请内存失败，将返回 null。

2.6.4 判断空队列

判断空队列就是判断一个队列结构是否为空。如果是空队列，则表示该队列结构中没有数据。此时可以进行入队列操作，但不可以进行出队列操作。

判断空队列的代码示例如下：

```
int SQTypeIsEmpty(SQType q)                             //判断空队列
{
    int temp=0;
    if(q.head==q.tail)
        temp=1;
        return (temp);
}
```

在这里，输入参数 q 为是一个指向操作的队列的引用。在程序中，根据队列 head 是否等于 tail，判断队列是否为空。

2.6.5 判断满队列

判断满队列就是判断一个队列结构是否为满。如果是满队列，则表示该队列结构中没有多余的

空间来保存额外数据。此时不可以进行入队列操作，但是可以进行出队列操作。

判断满队列的代码示例如下：

```
int SQTypeIsFull(SQType q)                          // 判断满队列
{
    int temp=0;
    if(q.tail==QUEUELEN)
        temp=1;
     return (temp);
}
```

在这里，输入参数 q 为是一个指向操作的队列的引用。程序中，判断队列 tail 是否已等于符号常量 QUEUELEN，从而判断队列是否已满。

2.6.6 清空队列

清空队列就是队列中的所有数据清除。清空队列的代码示例如下：

```
void SQTypeClear(SQType q)                          //清空队列
{
    q.head = 0;                                     //设置队头
    q.tail = 0;                                     //设置队尾
}
```

在这里，输入参数 q 为是一个指向操作的队列的引用。程序中，简单地将队列顶引用 head 和 tail 设置为 0，表示执行清空队列操作。

2.6.7 释放空间

释放空间是释放队列结构所占用的内存单元。由前面知道，在初始化队列结构时，使用了 new 关键字分配内存空间。虽然，我们可以使用清空队列操作。但是清空队列操作并没有释放内存空间，这就需要使用赋值 null 操作释放所分配的内存。

释放空间的代码示例如下：

```
void SQTypeFree(SQType q)                           //释放队列
{
    if (q!=null)
    {
        q=null;
    }
}
```

在这里，输入参数 q 为是一个指向操作的队列的引用。在程序中，直接使用赋值 null 操作释放所分配的内存。一般在不需要使用队列结构的时候使用，特别是程序结束时。

2.6.8 入队列

入队列是队列结构的基本操作，主要操作是将数据元素保存到队列结构。入队列操作的具体步骤如下：

（1）首先判断队列顶 tail，如果 tail 等于 QUEUELEN，则表示溢出，进行出错处理；否则执行以下操作。

（2）设置 tail=tail+1（队列顶引用加 1，指向入队列地址）。

（3）将入队列元素保存到 tail 指向的位置。

入队列操作的代码示例如下：

```
int InSQType(SQType q,DATA4 data)                    //入队列
{
    if(q.tail==QUEUELEN)
    {
        System.out.print("队列已满!操作失败!\n");
        return(0);
    }
    else
    {
        q.data[q.tail++]=data;                       //将元素入队列
        return(1);
    }
}
```

在这里，输入参数 q 是一个指向操作的队列的引用，输入参数 data 是需要入队列的数据元素。程序中首先判断队列是否溢出，如果溢出则不进行入队列操作，否则修改队列顶引用的值，再将元素入队列。

2.6.9 出队列

出队列是队列结构的基本操作，主要操作与入队列相反，其是从队列顶弹出一个数据元素。出队列操作的具体步骤如下：

（1）判断队列 head，如果 head 等于 tail，则表示为空队列，进行出错处理；否则，执行下面的步骤。

（2）从队列首部取出队头元素（实际是返回队头元素的引用）。

（3）设修改队头 head 的序号，使其指向后一个元素。

```
DATA4 OutSQType(SQType q)                            //出队列
{
    if(q.head==q.tail)
    {
        System.out.print("\n 队列已空!操作失败!\n");
        System.exit(0);
    }
    else
    {
        return q.data[q.head++];
    }
    return null;
}
```

在这里，输入参数 q 是一个指向操作的队列的引用。该方法返回值是一个 DATA 类型的数据，返回值是指向该数据元素的引用。

2.6.10 读结点数据

读结点数据也就是读取队列结构中结点的数据，这里的读操作其实就是读的队列头的数据。需

要注意的是，读结点数据的操作和出队列操作不同。读结点数据的操作仅是显示队列顶结点数据的内容，而出队列操作则将队列顶数据弹出，该数据不再存在了。

读结点数据的代码示例如下：

```
DATA4 PeekSQType(SQType q)                          //读结点数据
{
    if(SQTypeIsEmpty(q)==1)
    {
        System.out.print("\n 空队列!\n");
        return null;
    }
    else
    {
        return q.data[q.head];
    }
}
```

在这里，输入参数 q 是一个指向操作的队列的引用。该方法返回值同样是一个 DATA4 类型的引用数据，返回值是指向数据元素的引用。

2.6.11 计算队列长度

计算队列长度就是统计该队列中数据结点的个数。计算队列长度的方法比较简单，直接队尾序号减去队头序号即可。

计算队列长度的代码示例如下：

```
int SQTypeLen(SQType q)                             //计算队列长度
{
    int temp;
    temp=q.tail-q.head;
    return (temp);
}
```

在这里，输入参数 q 是一个指向操作的队列的引用。该方法的返回值便是队列的长度。

2.6.12 队列结构操作实例

有了前面的队列结构的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对队列结构的各种操作。这里我们给出一个完整的例子，来演示队列结构的创建、入队列和出队列等操作。代码示例如下：

【程序 2-4】

```
import java.util.Scanner;

class DATA4
{
    String name;
    int age;
}

class SQType
{
    static final int QUEUELEN=15;
    DATA4[] data=new DATA4[QUEUELEN];                //队列数组
```

```
int head;                                   //队头
int tail;                                   //队尾

SQType SQTypeInit()
{
SQType q;

    if((q=new SQType())!=null)              //申请内存
    {
        q.head = 0;                         //设置队头
        q.tail = 0;                         //设置队尾
        return q;
    }
    else
    {
        return null;                        //返回空
    }
}

int SQTypeIsEmpty(SQType q)                 //判断空队列
{
    int temp=0;
    if(q.head==q.tail)
        temp=1;
    return (temp);
}

int SQTypeIsFull(SQType q)                  // 判断满队列
{
    int temp=0;
    if(q.tail==QUEUELEN)
        temp=1;
    return (temp);
}

void SQTypeClear(SQType q)                  //清空队列
{
    q.head = 0;                             //设置队头
    q.tail = 0;                             //设置队尾
}

void SQTypeFree(SQType q)                   //释放队列
{
    if (q!=null)
    {
        q=null;
    }
}

int InSQType(SQType q,DATA4 data)           //入队列
{
    if(q.tail==QUEUELEN)
    {
        System.out.print("队列已满!操作失败!\n");
        return(0);
```

```
        }
        else
        {
            q.data[q.tail++]=data;                         //将元素入队列
            return(1);
        }
    }

    DATA4 OutSQType(SQType q)                              //出队列
    {
        if(q.head==q.tail)
        {
            System.out.print("\n 队列已空!操作失败!\n");

            System.exit(0);
        }
        else
        {
            return q.data[q.head++];
        }
        return null;
    }

    DATA4 PeekSQType(SQType q)                             //读结点数据
    {
        if(SQTypeIsEmpty(q)==1)
        {
            System.out.print("\n 空队列!\n");
            return null;
        }
        else
        {
            return q.data[q.head];
        }
    }

    int SQTypeLen(SQType q)                                //计算队列长度
    {
        int temp;
        temp=q.tail-q.head;
        return (temp);
    }

}

public class P2_4 {

    public static void main(String[] args) {
        SQType st=new SQType();

        DATA4 data1;

        Scanner input=new Scanner(System.in);
        SQType stack=st.SQTypeInit();                      //初始化队列
        System.out.print("入队列操作：\n");
```

```
        System.out.println("输入姓名 年龄进行入队列操作:");
        do
        {
            DATA4 data=new DATA4();
            data.name=input.next();
            data.age=input.nextInt();
            if(data.name.equals("0"))
            {
                break;                              //若输入 0，则退出
            }
            else
            {
                st.InSQType(stack,data);
            }
        }while(true);


        String temp="1";
        System.out.println("出队列操作:按任意非 0 键进行出栈操作:");
        temp=input.next();
        while(!temp.equals("0"))
        {
            data1=st.OutSQType(stack);
            System.out.printf("出队列的数据是(%s,%d)\n" ,data1.name,data1.age);
            temp=input.next();
        }
        System.out.println("测试结束！");
        st.SQTypeFree(stack);                      //释放队列所占用的空间

    }

}
```

在这里，main()主方法首先初始化队列结构，然后循环进行入队列操作，添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来，用户每按一次按键，则进行一次出队列操作，显示结点数据。当为空队列的时候，退出程序。然后该程序执行结果，如图 2-12 所示。

图 2-12　执行结果

2.7　树　结　构

前面介绍的几种数据结构都属于线性结构，但是有些问题无法抽象为线性数据数据结构，例如

一个国家的行政机构、一个家族的家谱等。这些问题有个共同点，那就是可以表示成一个层次关系。这种层次关系可以抽象为树结构，这就是本节所要讲解的主要数据结构。

2.7.1 什么是树结构

树（Tree）结构是一种描述非线性层次关系的数据结构，其中重要的是树的概念。树是 n 个数据结点的集合，在该集合中包含一个根结点，根结点之下分布着一些互不交叉的子集合，这些子集合也就是根结点的子树。树结构的基本特征如下：

- 在一个树结构中，有且仅有一个结点没有直接前驱，这个结点就是树的根结点；
- 除根结点外，其余每个结点有且仅有一个直接前驱；
- 每个结点可以有任意多个直接后继。

典型的树结构，如图 2-13 所示。从这个图中，我们可以直观地看到其类似于现实中树的根系，越往下层根系分支越多。对照着这个图，我们知道 A 便是树的根结点，根结点 A 有三个直接后继结点 B、C 和 D，而结点 C 只有一个直接前驱结点 A。

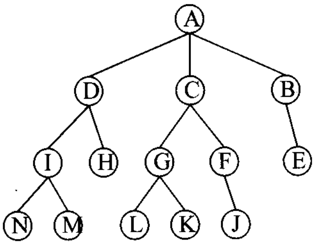


图 2-13　典型的树结构

另外，一个树结构也可以是空，此时空树中没有数据结点，也就是一个空集合。如果树结构中仅包含一个结点，那么这也是一个树，树根便是该结点自身。

从前面的树的定义可以看出，树具有一种层次结构的性质。而从数学的角度来看，树具有一种递归的特性。在树中的每个结点及其之后的所有结点构成一个子树，这个子树也包括根结点。

2.7.2 树的基本概念

对于读者来说，树是一种全新的数据结构，其中包含了许多新的概念需要了解。

- 父结点和子结点：每个结点的子树的根称为该结点的子结点，相应地，该结点被称为子结点的父结点。
- 兄弟结点：具有同一父结点的结点称为兄弟结点。
- 结点的度：一个结点所包含子树的数量。
- 树的度：是指该树所有结点中最大的度。
- 叶结点：树中度为零的结点称为叶结点或终端结点。
- 分支结点：树中度不为零的结点称为分枝结点或非终端结点。
- 结点的层数：结点的层数从树根开始计算，根结点为第 1 层、依次向下为第 2、3、……、n 层。我们知道树是一种层次结构，每个结点都处在一定的层次上。
- 树的深度：树中结点的最大层数称为树的深度。
- 有序树：若树中各结点的子树（兄弟结点）是按一定次序从左向右安排的，称为有序树。
- 无序树：若树中各结点的子树（兄弟结点）未按一定次序安排，称为无序树。
- 森林（forest）：n（n>0）棵互不相交的树的集合。

下面，我们从一个例子来看上述树结构的基本概念。图 2-14 所示为一个基本的树结构。其中，结点 A 为根结点。结点 A 有 3 个子树，因此，结点 A 的度为 3。同理，结点 E 有两个子树，结点 E 的度为 2。所有结点中，结点 A 的度为 3 最大，因此整个树的度为 3。结点 E 是结点 K 和结点 L 的

父结点，结点 K 和结点 L 是结点 E 的子结点，结点 K 和结点 L 之间为兄弟结点。

在这个树结构中，结点 G、结点 H、结点 K、结点 J、结点 N、结点 O、结点 P 和结点 Q 都是叶结点。其余的都是分支结点，整个树的深度为 4。除去根结点 A，留下的子树就构成了一个森林。

由于树结构不是一种线性结构，我们很难用数学式子来表示，这就需要采用全新的方式来表示树。一般来说，常采用层次括号法。层次括号法的基本规则如下：

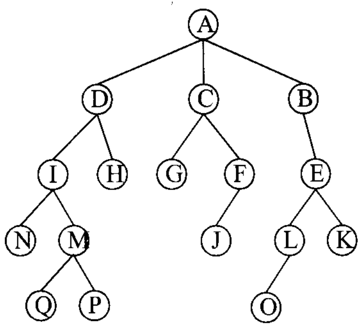


图 2-14　树结构

- 根结点放入一对圆括号中；
- 根结点的子树由左至右的顺序放入括号中；
- 对子树做上述相同的处理。

这样，同层子树与它的根结点用圆括号括起来，同层子树之间用逗号隔开，最后用闭括号括起来。按照这种方法，图 2-13 所示的树结构可以表示成如下形式：

(A(B(E)),(C(F(J)),(G(K,L))),(D(H),(I(M,N))))

2.7.3　二叉树

在树结构中，二叉树是最简单的一种形式。我们在研究树结构的时候，二叉树是重点。因为二叉树的描述相对简单，处理也相对简单，而且更为重要的是任意的树都可以转换成对应的二叉树。因此，二叉树是所有树结构的基础。

1. 什么是二叉树

二叉树是树结构的一种特殊形式，其是 n 个结点的集合，每个结点最多只能有两个子结点。二叉树的子树仍然是二叉树。二叉树的一个结点上对应的两个子树分别称为左子树和右子树。由于子树有左右之分，因此二叉树是有序树。

从这个定义可以看出，在普遍的树结构中，结点的最大度数没有限制，而二叉树结点的最大度数为 2。另外，树结构中没有左子树和右子树的区分，而二叉树中则有这个区别。

一个二叉树结构也可以是空，此时空二叉树中没有数据结点，也就是一个空集合。如果二叉树结构中仅包含一个结点，那么这也是一个二叉树，树根便是该结点自身。

另外，依照子树的位置的个数，二叉树还有如下几种形式，如图 2-15 所示。

其中，对于图（a），只有一个子结点且位于左子树位置，右子树位置为空；对于图（b），只有一个子结点且位于右子树位置，左子树位置为空；对于图（c），具有完整的两个子结点，也就是左子树和右子树都存在。

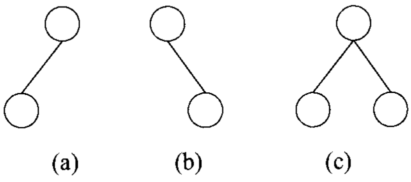


图 2-15　二叉树的几种形式

对于一般的二叉树，在树结构中可能包含上述的各种形式。按照上述二叉树的这几种形式来看，为了研究的方便，二叉树还可以进一步细分为两种特殊的类型，满二叉树和完全二叉树。

对于满二叉树，就是在二叉树中除最下一层的叶结点外，每层的结点都有两个子结点。典型的满二叉树，如图 2-16 所示。

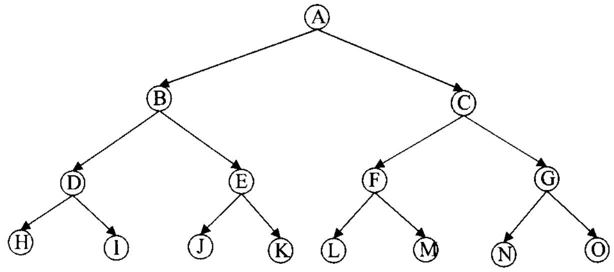


图 2-16　满二叉树

对于完全二叉树，就是在二叉树中除二叉树最后一层外，其他各层的结点数都达到最大个数，且最后一层叶结点按照从左向右的顺序连续存在，只缺最后一层右侧若干结点。典型的完全二叉树，如图 2-17 所示。

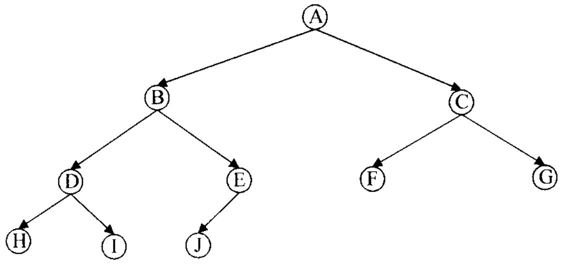


图 2-17　完全二叉树

从上面的满二叉树和完全二叉树的定义可以看出，满二叉树一定是完全二叉树，而完全二叉树不一定是满二叉树，因为其没有达到完全满分支的结构。

2. 完全二叉树的性质

二叉树中树结构研究的重点，特别是完全二叉树。对于完全二叉树，如果树中包含 n 个结点，假设这些结点按照顺序方式存储。那么，对于任意一个结点 m 来说，具有如下性质：

- 如果 m != 1，则结点 m 的父结点的编号为 m/2；
- 如果 2*m≤n，则结点 m 的左子树根结点的编号为 2*m；若 2*m>n，则无左子树，进一步也就没有右子树；
- 如果 2*m+1≤n，则结点 m 的右子树根结点编号为 2*m+1；若 2*m+1>n，则无右子树。

另外，对于该完全二叉树来说，其深度为[log2n]+1。

这些基本性质展示了完全二叉树结构上的一些特点，在完全二叉树的存储方式及运算处理上都有重要意义。

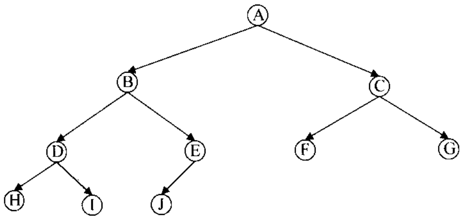
按照数据的存储方式，树结构可以分为顺序存储结构和链式存储结构两种。接下来，我们便分别讨论这两种存储方式的实现。

3. 二叉树的顺序存储

顺序存储方式是最基本的数据存储方式。与线性表类似，树结构的顺序存储一般也是采用一维

结构数组来表示。这里的关键是定义合适的次序来存放树中各个层次的数据。

这里，我们先来看看完全二叉树的顺序存储。如图 2-18 所示，这是一个典型的完全二叉树。每个结点的数据为字符类型。如果采用顺序存储方式，我们可以将其按层来存储。即先存储根结点，然后从左至右依次存储下一层结点的数据，……直到所有的结点数据完全存储。在图 2-18 右侧所示为这种存储的形式。



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

图 2-18　完全二叉树的存储

上述完全二叉树顺序存储结构的数据定义，可以采用如下形式：

```
static final int   MAXLen=100;              //最大结点数
char[] SeqBinTree=new char[MAXLen];  //定义保存二叉树数组
```

其中，元素类型是每个结点的数据类型，这里是简单的字符型。对于复杂的数据，读者也可以采用自定义的对象，这样保存完全二叉树的便成为对象数组。

我们可以根据前面介绍的完全二叉树的性质，来推算各个结点之间的位置关系。例如：

- 对于结点 D，其位于数组的第 4 个位置，则其父结点的编号为 4/2=2，也就是结点 B。
- 结点 D 左子结点的编号为 2*4=8，也就是结点 H。
- 结点 D 右子结点的编号为 2*4+1=9，也就是结点 I。

对于非完全二叉树的存储要稍复杂些。为了仍然可以使用上述简单有效的完全二叉树的性质，我们往往将一个非完全二叉树填充为一个完全二叉树，如图 2-19 所示。左图为一个典型的非完全二叉树，我们将缺少的部分，填上一个空的数据结点来构成右图的完全二叉树。

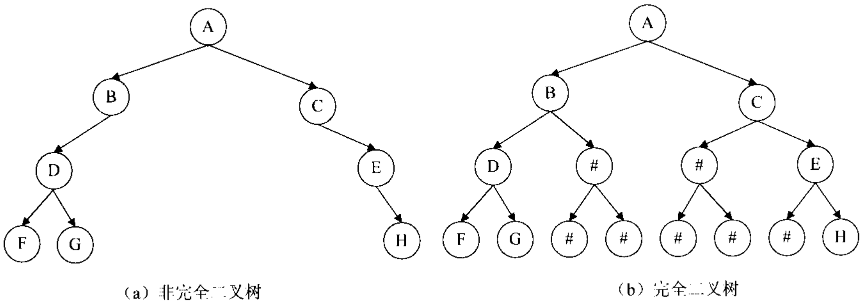


图 2-19　非完全二叉树的填充

这样，我们再按照完全二叉树的顺序存储方式来存储，如图 2-20 所示。下面我们便可以按照前述的规则推算结点之间的关系了。

但是，这种方式有很大的缺点，即浪费存储空间，这是因为其中填充了大量的无用数据。因此，顺序存储方式一般只适用于完全二叉树的情况。对于更为一般的情况，一般建议采用链式存储方式。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	C	D	#	#	E	F	G	#	#	#	#	#	H

图 2-20　非完全二叉树的存储

4. 二叉树的链式存储

与线性结构的链式存储类似，二叉树的链式存储结构包含结点元素以及分别指向左子树和右子树的引用。典型的二叉树的链式存储结构，如图 2-21 所示。

LSonNode	NodeData	RSonNode

图 2-21　二叉树的链式存储结构

二叉树的链式存储结构定义代码示例如下：

```
class  ChainTreeType
{
   char  NodeData;                      //元素数据
   ChainTree LSonNode;                  //左子树结点引用
   ChainTree RSonNode;                  //右子树结点引用
}
ChainTreeType  root=null;               //定义二叉树根结点引用
```

有的时候，为了后续计算的方便，也可以保存一个该结点的父结点的引用。此时二叉树的链式存储结构包含了结点元素、指向父结点的引用以及分别指向左子树和右子树的引用。这种带父结点的二叉树链式存储结构，如图 2-22 所示。

LSonNode	NodeData	RSonNode	ParentNode

图 2-22　带父结点的二叉树链式存储结构

带父结点的二叉树链式存储结构定义代码示例如下：

```
class  ChainTreeType
{
    char  NodeData;                     //元素数据
    ChainTree  LSonNode;                //左子树结点引用
    ChainTree  RSonNode;                //右子树结点引用
    Chain  ParentNode;                  //父结点引用
}
ChainTreeType  root=null;               //定义二叉树根结点引用
```

接下来，我们便看看如何在 Java 语言中建立二叉树结构，并完成二叉树结构的基本运算。

2.7.4　准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始二叉树结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在二叉树结构操作中需要用到的变量及类等。示例代码如下：

```
static final int MAXLEN=20;             //最大长度

class CBTType                           //定义二叉树结点类型
{
    String data;                        //元素数据
    CBTType left;                       //左子树结点引用
    CBTType right;                      //右子树结点引用
}
```

这里，定义了二叉树结构的类 CBTType。结点的具体数据保存在一个字符串 data 中，而引用 left 用来指向左子树结点，引用 right 用来指向右子树结点。

2.7.5 初始化二叉树

在使用顺序表之前，首先要初始化二叉树。这里，在程序中只需将一个结点设置为二叉树的根结点。代码示例如下：

```
CBTType InitTree()                                    //初始化二叉树的根
{
    CBTType node;

    if((node=new CBTType())!=null)                    //申请内存
    {
        System.out.printf("请先输入一个根结点数据:\n");
        node.data=input.next();
        node.left=null;
        node.right=null;
        if(node!=null)                                //如果二叉树根结点不为空
        {
            return node;
        }
        else
        {
            return null;
        }
    }
    return null;
}
```

在这里，首先申请内存，然后由用户输入一个根结点数据，并将指向左子树和右子树的引用设置为空，即可完成二叉树的初始化工作。

2.7.6 添加结点

添加结点就是在二叉树中添加结点数据。添加结点时除了要输入结点数据外，还需要指定其父结点，以及添加的结点是作为左子树还是作为右子树。添加结点的代码示例如下：

```
void AddTreeNode(CBTType treeNode)                    //添加结点
{
    CBTType pnode,parent;
    String data;
    int menusel;

    if((pnode=new CBTType())!=null)                   //分配内存
    {
        System.out.printf("输入二叉树结点数据:\n");

        pnode.data=input.next();
        pnode.left=null;                              //设置左右子树为空
        pnode.right=null;

        System.out.printf("输入该结点的父结点数据:");
```

```
        data=input.next();

        parent=TreeFindNode(treeNode,data);                 //查找指定数据的结点
        if(parent==null)                                     //如果未找到
        {
            System.out.printf("未找到该父结点!\n");
            pnode=null;                                      //释放创建的结点内存
            return;
        }
        System.out.printf("1.添加该结点到左子树\n2.添加该结点到右子树\n");
        do
        {
            menusel=input.nextInt();                         //输入选择项

            if(menusel==1 || menusel==2)
            {
                if(parent==null)
                {
                    System.out.printf("不存在父结点，请先设置父结点!\n");
                }
                else
                {
                    switch(menusel)
                    {
                        case 1:                              //添加到左结点
                            if(parent.left!=null)            //左子树不为空
                            {
                                System.out.printf("左子树结点不为空!\n");
                            }
                            else
                            {
                                parent.left=pnode;
                            }
                            break;
                        case 2:                              //添加到右结点
                            if( parent.right!=null)          //右子树不为空
                            {
                                System.out.printf("右子树结点不为空!\n");
                            }
                            else
                            {
                                parent.right=pnode;
                            }
                            break;
                        default:
                            System.out.printf("无效参数!\n");
                    }
                }
            }
        }while(menusel!=1 && menusel!=2);
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为二叉树的根结点，传入根结点方便代码中进行查找。程序中首先申请内存，然后由用户输入二叉树结点数据，并设置左右子树为空。接着指定其父结点，最后设置其作为左子树还是作为右子树。

2.7.7　查找结点

查找结点就是在遍历二叉树中的每一个结点中，逐个比较数据，当找到目标数据时将返回该数据所在结点的引用。查找结点的代码示例如下：

```
CBTType TreeFindNode(CBTType treeNode,String data)      //查找结点
{
    CBTType ptr;

    if(treeNode==null)
    {
        return null;
    }
    else
    {
        if(treeNode.data.equals(data))
        {
            return treeNode;
        }
        else
        {                                                // 分别向左右子树递归查找
            if((ptr=TreeFindNode(treeNode.left,data))!=null)
            {
                return ptr;
            }
            else if((ptr=TreeFindNode(treeNode.right, data))!=null)
            {
                return ptr;
            }
            else
            {
                return null;
            }
        }
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为待查找的二叉树的根结点，输入参数 data 为待查找的结点数据。程序中首先判断根结点是否为空，然后分别向左右子树递归查找。如果当前结点的数据与查找数据相等，则返回当前结点的引用。

2.7.8　获取左子树

获取左子树就是返回当前结点的左子树结点的值。由于我们在二叉树结构中定义了相应的引用，因此，这个操作比较简单。获取左子树的示例代码如下：

```
CBTType TreeLeftNode(CBTType treeNode)                  //获取左子树
{
    if(treeNode!=null)
    {
        return treeNode.left;                           //返回值
    }
    else
    {
```

```
            return null;
        }
    }
```

在这里，输入参数 treeNode 为二叉树的一个结点。该程序将返回该结点的左子树的引用。

2.7.9 获取右子树

获取右子树就是返回当前结点的右子树结点的值。由于我们在二叉树结构中定义了相应的引用，因此，这个操作比较简单。获取右子树的示例代码如下：

```
CBTType TreeRightNode(CBTType treeNode)          //获取右子树
{
    if(treeNode!=null)
    {
        return treeNode.right;                   //返回值
    }
    else
    {
        return null;
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为二叉树的一个结点。该程序将返回该结点的右子树的引用。

2.7.10 判断空树

判断空树就是判断一个二叉树结构是否为空。如果是空树，则表示该二叉树结构中没有数据。判断空树的代码示例如下：

```
int TreeIsEmpty(CBTType treeNode)                //判断空树
{
    if(treeNode!=null)
    {
        return 0;
    }
    else
    {
        return 1;
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为待判断的二叉树的根结点。该函数检查二叉树是否为空，为空则返回 1,否则返回 0。

2.7.11 计算二叉树深度

计算二叉树深度就是计算二叉树中结点的最大层数，这里往往需要采用递归算法来实现。计算二叉树深度的示例代码如下：

```
int TreeDepth(CBTType treeNode)                  //计算二叉树深度
{
    int depleft,depright;

    if(treeNode==null)
```

```
    {
        return 0; //对于空树，深度为 0
    }
    else
    {
        depleft = TreeDepth(treeNode.left);          //左子树深度 (递归调用)
        depright = TreeDepth(treeNode.right);        //右子树深度 (递归调用)
        if(depleft>depright)
        {
            return depleft + 1;

        else
        {
            return depright + 1;
        }
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为待计算的二叉树的根结点。程序中首先判断根结点是否为空，然后分别按照递归调用来计算左子树深度和右子树深度，从而完成整个二叉树深度的计算。

2.7.12 清空二叉树

清空二叉树就是将二叉树变成一个空树，这里也需要使用递归算法来实现。清空二叉树的示例代码如下：

```
void ClearTree(CBTType treeNode)                 // 清空二叉树
{
    if(treeNode!=null)
    {
        ClearTree(treeNode.left);                //清空左子树
        ClearTree(treeNode.right);               //清空右子树
        treeNode=null;                           //释放当前结点所占内存
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为待清空的二叉树的根结点。程序中按照递归调用来清空左子树和右子树，并且使用赋值 null 操作来释放当前结点所占内存，从而完成清空操作。

2.7.13 显示结点数据

显示结点数据就是显示当前结点的数据内容，这个操作比较简单。显示结点数据的代码示例如下：

```
void TreeNodeData(CBTType p)                     //显示结点数据
{
    System.out.printf("%s ",p.data);             //输出结点数据
}
```

在这里，输入参数 p 为待显示的结点。在程序中，直接使用 printf 方法输出该结点数据。

2.7.14 遍历二叉树

遍历二叉树就是逐个查找二叉树中所有的结点，这是二叉树的基本操作，因为很多操作都需要首先遍历整个二叉树。由于二叉树结构的特殊性，我们往往可以采用多种方法进行遍历。

由于二叉树代表的是一种层次结构，因此，我们首先想到的便是按层来遍历整个二叉树。对于二叉树的按层遍历，一般不能使用递归算法来编写代码，而是使用一个循环队列来进行处理。首先将第 1 层（根结点）进入队列，再将第 1 结根结点的左右子树（第 2 层）进入队列，……就这样循环处理，可以逐层遍历。

上述按层遍历有点复杂，我们也可以使用递归来简化遍历算法。首先我们来分析一个二叉树中的基本结构，如图 2-23 所示。这里 D 表示根结点，L 表示左子树，R 表示右结点。一般可以采用如下几种方法来遍历整个二叉树：

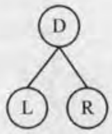


图 2-23　二叉树基本结构

- 先序遍历：即先访问根结点，再按先序遍历左子树，最后按先序遍历右子树。先序遍历一般也称为先根次序遍历，简称为 DLR 遍历。
- 中序遍历：即先按中序遍历左子树，再访问根结点，最后按中序遍历右子树。中序遍历一般也称为中根次序遍历，简称为 LDR 遍历。
- 后序遍历：即先按后序遍历左子树，再按后序遍历右子树，最后访问根结点。后序遍历一般也称为后根次数遍历，简称为 LRD 遍历。

先序遍历、中序遍历和后序遍历的最大好处便是可以方便地利用递归的思想来实现遍历算法。下面我们就详细介绍这几种遍历算法的代码实现。

1．按层遍历算法

按层遍历算法是最直观的遍历算法。首先处理第 1 层即根结点，再处理第 1 层根结点的左右子树，也即是第 2 层，……就这样循环处理，就可以逐层遍历。按层遍历算法的代码示例如下：

```
void LevelTree(CBTType treeNode)                          //按层遍历
{
    CBTType p;
    CBTType[] q=new CBTType[MAXLEN];                      //定义一个顺序栈
    int head=0,tail=0;

    if(treeNode!=null)                                    //如果队首引用不为空
    {
        tail=(tail+1)%MAXLEN;                             //计算循环队列队尾序号
        q[tail] = treeNode;                               //将二叉树根引用进队
    }
    while(head!=tail)                                     //队列不为空，进行循环
    {
        head=(head+1)%MAXLEN;                             //计算循环队列的队首序号
        p=q[head];                                        //获取队首元素
        TreeNodeData(p);                                  //处理队首元素
        if(p.left!=null)                                  //如果结点存在左子树
        {
            tail=(tail+1)%MAXLEN;                         //计算循环队列的队尾序号
            q[tail]=p.left;                               //将左子树引用进队
        }

        if(p.right!=null)                                 //如果结点存在右子树
        {
            tail=(tail+1)%MAXLEN;                         //计算循环队列的队尾序号
            q[tail]=p.right;                              //将右子树引用进队
        }
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为需要遍历的二叉树根结点。程序在整个处理过程中，首先从根结点开始，将每层的结点逐步进入队列，这样就可得到按层遍历的效果。

2．先序遍历算法

先序遍历算法就是先按中序遍历左子树，再访问根结点，最后按中序遍历右子树。程序中可以按照递归的思路来遍历整个二叉树。先序遍历算法的示例代码如下：

```
void DLRTree(CBTType treeNode)                    //先序遍历
{
    if(treeNode!=null)
    {
        TreeNodeData(treeNode);                   //显示结点的数据
        DLRTree(treeNode.left);
        DLRTree(treeNode.right);
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为需要遍历的二叉树根结点。

3．中序遍历算法

中序遍历算法就是先访问根结点，再按先序遍历左子树，最后按先序遍历右子树。程序中可以按照递归的思路来遍历整个二叉树。中序遍历算法的示例代码如下：

```
void LDRTree(CBTType treeNode)    //中序遍历
{
    if(treeNode!=null)
    {
        LDRTree(treeNode.left);                   //中序遍历左子树
        TreeNodeData(treeNode);                   //显示结点数据
        LDRTree(treeNode.right);                  //中序遍历右子树
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为需要遍历的二叉树根结点。

4．后序遍历算法

后序遍历算法就是先按后序遍历左子树，再按后序遍历右子树，最后访问根结点。程序中可以按照递归的思路来遍历整个二叉树。后序遍历算法的示例代码如下：

```
void LRDTree(CBTType treeNode) //后序遍历
{
    if(treeNode!=null)
    {
        LRDTree(treeNode.left);                   //后序遍历左子树
        LRDTree(treeNode.right);                  //后序遍历右子树
        TreeNodeData(treeNode);                   //显示结点数据
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为需要遍历的二叉树根结点。

2.7.15　树结构操作实例

有了前面的树结构的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对树结构的各种操作。这里我们给

出一个完整的例子，来演示树结构的创建、插入结点和遍历等操作。代码示例如下：

【程序 2-5】

```
import java.util.Scanner;

class CBTType                                          //定义二叉树结点类型
{
    String data;                                       //元素数据
    CBTType left;                                      //左子树结点引用
    CBTType right;                                     //右子树结点引用
}

public class P2_5 {
    static final int MAXLEN=20;
    static Scanner input=new Scanner(System.in);
    CBTType InitTree()                                 //初始化二叉树的根
    {
    CBTType node;

        if((node=new CBTType())!=null)                 //申请内存
        {
            System.out.printf("请先输入一个根结点数据:\n");
            node.data=input.next();
            node.left=null;
            node.right=null;
            if(node!=null)                             //如果二叉树根结点不为空
            {
                return node;
            }
            else
            {
                return null;
            }
        }
        return null;
    }

    void AddTreeNode(CBTType treeNode)                 //添加结点
    {
        CBTType pnode,parent;
        String data;
        int menusel;

        if((pnode=new CBTType())!=null)                //分配内存
        {
            System.out.printf("输入二叉树结点数据:\n");

            pnode.data=input.next();
            pnode.left=null;                           //设置左右子树为空
            pnode.right=null;

            System.out.printf("输入该结点的父结点数据:");
            data=input.next();

            parent=TreeFindNode(treeNode,data);        //查找指定数据的结点
```

```
        if(parent==null)                              //如果未找到
        {
            System.out.printf("未找到该父结点!\n");
            pnode=null;                               //释放创建的结点内存
            return;
        }
        System.out.printf("1.添加该结点到左子树\n2.添加该结点到右子树\n");
        do
        {
            menusel=input.nextInt();                  //输入选择项

            if(menusel==1 || menusel==2)
            {
                if(parent==null)
                {
                    System.out.printf("不存在父结点，请先设置父结点!\n");
                }
                else
                {
                    switch(menusel)
                    {
                        case 1:                       //添加到左结点
                            if(parent.left!=null)     //左子树不为空
                            {
                                System.out.printf("左子树结点不为空!\n");
                            }
                            else
                            {
                                parent.left=pnode;
                            }
                        break;
                        case 2:                       //添加到右结点
                            if( parent.right!=null)   //右子树不为空
                            {
                                System.out.printf("右子树结点不为空!\n");
                            }
                            else
                            {
                                parent.right=pnode;
                            }
                            break;
                        default:
                            System.out.printf("无效参数!\n");
                    }
                }
            }
        }while(menusel!=1 && menusel!=2);
    }
}

CBTType TreeFindNode(CBTType treeNode,String data)        //查找结点
{
CBTType ptr;

    if(treeNode==null)
```

```
        {
            return null;
        }
        else
        {
            if(treeNode.data.equals(data))
            {
                return treeNode;
            }
            else
            {                                               // 分别向左右子树递归查找
                if((ptr=TreeFindNode(treeNode.left,data))!=null)
                {
                    return ptr;
                }
                else if((ptr=TreeFindNode(treeNode.right, data))!=null)
                {
                    return ptr;
                }
                else
                {
                    return null;
                }
            }
        }
    }

    CBTType TreeLeftNode(CBTType treeNode)                  //获取左子树
    {
        if(treeNode!=null)
        {
            return treeNode.left;                           //返回值
        }
        else
        {
            return null;
        }
    }

    CBTType TreeRightNode(CBTType treeNode)                 //获取右子树
    {
        if(treeNode!=null)
        {
            return treeNode.right;                          //返回值
        }
        else
        {
            return null;
        }
    }

    int TreeIsEmpty(CBTType treeNode)                       //判断空树
    {
        if(treeNode!=null)
        {
```

```
            return 0;
        }
        else
        {
            return 1;
        }
    }

    int TreeDepth(CBTType treeNode)                    //计算二叉树深度
    {
    int depleft,depright;

        if(treeNode==null)
        {
            return 0; //对于空树，深度为 0
        }
        else
        {
            depleft = TreeDepth(treeNode.left);        //左子树深度（递归调用)
            depright = TreeDepth(treeNode.right);      //右子树深度（递归调用)
            if(depleft>depright)
            {
               return depleft + 1;
            }
            else
            {
                return depright + 1;
            }
        }
    }

    void ClearTree(CBTType treeNode)                   // 清空二叉树
    {
         if(treeNode!=null)
         {
             ClearTree(treeNode.left);                 //清空左子树
             ClearTree(treeNode.right);                //清空右子树
             treeNode=null;                            //释放当前结点所占内存
         }
    }

    void TreeNodeData(CBTType p)                       //显示结点数据
    {
         System.out.printf("%s ",p.data);              //输出结点数据
    }


    void LevelTree(CBTType treeNode)  //按层遍历
    {
         CBTType p;
         CBTType[] q=new CBTType[MAXLEN];              //定义一个顺序栈
         int head=0,tail=0;

         if(treeNode!=null)                            //如果队首引用不为空
         {
```

```
            tail=(tail+1)%MAXLEN;                    //计算循环队列队尾序号
            q[tail] = treeNode;                      //将二叉树根引用进队
        }
        while(head!=tail)                            //队列不为空，进行循环
        {
            head=(head+1)%MAXLEN;                    //计算循环队列的队首序号
            p=q[head];                               //获取队首元素
            TreeNodeData(p);                         //处理队首元素
            if(p.left!=null)                         //如果结点存在左子树
            {
                tail=(tail+1)%MAXLEN;                //计算循环队列的队尾序号
                q[tail]=p.left;                      //将左子树引用进队
            }

            if(p.right!=null)                        //如果结点存在右子树
            {
                tail=(tail+1)%MAXLEN;                //计算循环队列的队尾序号
                q[tail]=p.right;                     //将右子树引用进队
            }
        }
    }


    void DLRTree(CBTType treeNode)                   //先序遍历
    {
        if(treeNode!=null)
        {
            TreeNodeData(treeNode);                  //显示结点的数据
            DLRTree(treeNode.left);
            DLRTree(treeNode.right);
        }
    }

    void LDRTree(CBTType treeNode)                   //中序遍历
    {
        if(treeNode!=null)
        {
            LDRTree(treeNode.left);                  //中序遍历左子树
            TreeNodeData(treeNode);                  //显示结点数据
            LDRTree(treeNode.right);                 //中序遍历右子树
        }
    }

    void LRDTree(CBTType treeNode)                   //后序遍历
    {
        if(treeNode!=null)
        {
            LRDTree(treeNode.left);                  //后序遍历左子树
            LRDTree(treeNode.right);                 //后序遍历右子树
            TreeNodeData(treeNode);                  //显示结点数据
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        CBTType root=null;                           //root 为指向二叉树根结点的引用
```

```
        int menusel;
        P2_5 t=new P2_5();
        //设置根元素
        root=t.InitTree();
        //添加结点
        do{
            System.out.printf("请选择菜单添加二叉树的结点\n");
            System.out.printf("0.退出\t");                          //显示菜单
            System.out.printf("1.添加二叉树的结点\n");
            menusel=input.nextInt();
            switch(menusel)
            {
                case 1:                                         //添加结点
                    t.AddTreeNode(root);
                    break;
                case 0:
                    break;
                default:
                    ;
            }
        }while(menusel!=0);

        //遍历
        do{
            System.out.printf("请选择菜单遍历二叉树,输入 0 表示退出:\n");
            System.out.printf("1.先序遍历 DLR\t"); //显示菜单
            System.out.printf("2.中序遍历 LDR\n");
            System.out.printf("3.后序遍历 LRD\t");
            System.out.printf("4.按层遍历\n");
            menusel=input.nextInt();
            switch(menusel)
            {
            case 0:
                break;
            case 1:                                             //先序遍历
                System.out.printf("\n 先序遍历 DLR 的结果：");
                t.DLRTree(root);
                System.out.printf("\n");
                break;
            case 2:                                             //中序遍历
                System.out.printf("\n 中序 LDR 遍历的结果：");
                t.LDRTree(root);
                System.out.printf("\n");
                break;
            case 3:                                             //后序遍历
                System.out.printf("\n 后序遍历 LRD 的结果：");
                t.LRDTree(root);
                System.out.printf("\n");
                break;
            case 4:                                             //按层遍历
                System.out.printf("\n 按层遍历的结果：");
                t.LevelTree(root);
                System.out.printf("\n");
                break;
            default:
                ;
```

```
                    }
            }while(menusel!=0);
            //深度
            System.out.printf("\n 二叉树深度为:%d\n",t.TreeDepth(root));

            t.ClearTree(root);                                    //清空二叉树
            root=null;
        }
}
```

在这里，主方法首先初始化二叉树，设置根元素。然后由用户来选择添加结点的操作。接着，分别可以选择先序遍历、中序遍历、后序遍历和按层遍历四种方式来遍历整个二叉树。最后，输出该二叉树的深度，并清空二叉树，结束整个操作过程。

在程序执行时，首先初始化输入根结点为 A，然后选择菜单“1”分别添加结点 B 为结点 A 的左子树，添加结点 C 为结点 A 的右子树，……整个程序的执行过程，如图 2-24 所示。添加完所有的结点后，选择菜单“0”便可以退出结点的添加过程，进而执行后面的程序。

程序接下来便是执行不同的二叉树遍历操作。按照菜单的指示分别选择先序遍历、中序遍历、后序遍历和按层遍历四种方式。程序执行的结果，如图 2-25 所示。读者可以结合这四种遍历算法的方法和程序代码，来理解这里遍历的结果。最后，用户输入菜单“0”退出遍历过程。程序最后输出该二叉树的深度为 3，并清空整个二叉树，从而完成整个操作过程。

图 2-24 添加结点

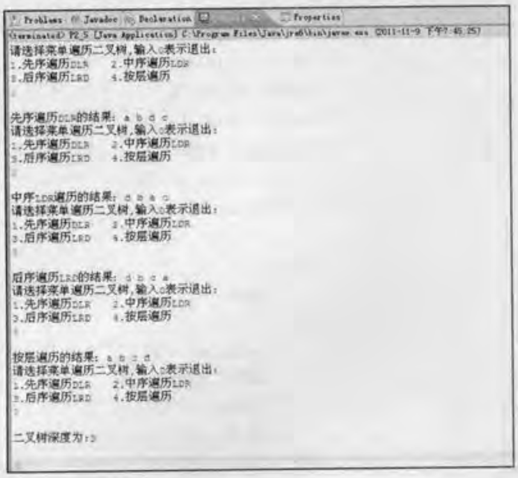


图 2-25 四种遍历方式

2.8 图 结 构

图（Graph）结构也是一种非线性数据结构，图结构在实际生活中具有丰富的例子。例如，通信网络、交通网络、人际关系网络等都可以归结为图结构。图结构的组织形式要比树结构更为复杂，因此，图结构对存储和遍历等操作具有更高的要求。

2.8.1 什么是图结构

我们知道前面介绍的树结构的一个基本特点，是数据元素之间具有层次关系，每一层的元素可

以和多个下层元素关联，但是只能和一个上层元素关联。如果把这个规则进一步扩展，也就是说，每个数据元素之间可以任意关联，这就构成了一个图结构。正是这种任意关联性，导致了图结构中数据关系的复杂性。研究图结构的一个专门理论工具便是图论。

典型的图结构，如图 2-26 所示。一个典型的图结构包括如下两个部分：

- 顶点（Vertex）：图中的数据元素。
- 边（Edge）：图中连接这些顶点的线。

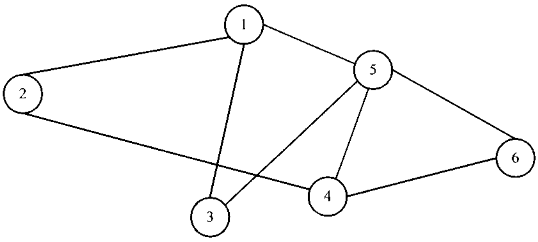


图 2-26　图结构

所有的顶点构成一个顶点集合，所有的边构成边集合，一个完整的图结构就是由顶点集合和边集合组成。图结构在数学上一般记为以下形式：

G=(V，E)

或者

G=(V(G)，E(G))

其中，V(G)表示图结构中所有顶点的集合，顶点可以用不同的数字或者字母来表示。E(G)是图结构中所有边的集合，每条边由所连接的两个顶点表示。

注意：图结构中顶点集合 V(G)必须为非空，即必须包含一个顶点。而图结构中边集合 E(G)可以为空，此时表示没有边。

例如，对于上图中所示的图结构，其顶点集合和边集合如下：

$V(G)=\{V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6\}$

$E(G)=\{(V_1，V_2)，(V_1，V_3)，(V_1，V_5)，(V_2，V_4)，(V_3，V_5)，(V_4，V_5)，(V_4，V_6)，(V_5，V_6)\}$

2.8.2　图的基本概念

图论是专门研究图结构的一个理论工具。为了讲解和读者理解的方便，我们这里简单介绍一些基本的图结构概念。

1．无向图

如果一个图结构中，所有的边都没有方向性，那么这种图便称为无向图。典型的无向图，如图 2-27 所示。由于无向图中的边没有方向性，这样，我们在表示边的时候对两个顶点的顺序没有要求。例如顶点 V1 和顶点 V5 之间的边，可以表示为（V1，V5），也可以表示为（V5，V1）。

对于图 2-27 所示的无向图，对应的顶点集合和边集合如下：

$V(G)=\{V_1，V_2，V_3，V_4，V_5\}$

$E(G)=\{(V_1，V_2)，(V_1，V_5)，(V_2，V_4)，(V_3，V_5)，(V_4，V_5)，(V_1，V_3)\}$

2. 有向图

如果一个图结构中，边是有方向性的，那么这种图便称为有向图。典型的有向图，如图 2-28 所示。由于有向图中的边有方向性，这样，我们在表示边的时候对两个顶点的顺序有要求。并且，为了同无向图区分，这里我们采用尖括号表示有向边。例如，<V3,V4>表示从顶点 V3 到顶点 V4 的一条边，而<V4,V3>表示从顶点 V4 到顶点 V3 的一条边。<V3,V4>和<V4,V3>表示的是两条不同的边。

对于图 2-28 所示的有向图，对应的顶点集合和边集合如下：

$V(G)=\{V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6\}$

$E(G)=\{<V_1，V_2>，<V_2，V_1>，<V_2，V_3>，<V_3，V_4>，<V_4，V_3>，<V_4，V_5>，<V_5，V_6>，<V_6，V_4>，<V_6，V_2>\}$

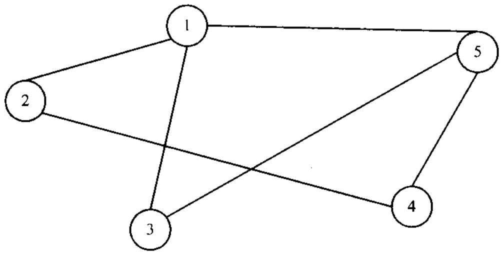


图 2-27　无向图结构

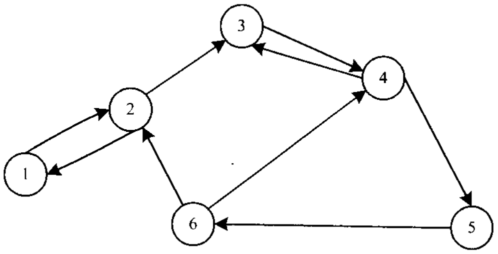


图 2-28　有向图结构

3. 顶点的度（Degree）

连接顶点的边的数量称为该顶点的度。顶点的度在有向图和无向图中具有不同的表示。对于无向图，一个顶点 V 的度比较简单，其是连接该顶点的边的数量，记为 D(V)。例如，图 2-27 所示的无向图中，顶点 V_4的度为 2，而 V_5的度为 3。

对于有向图要稍复杂些，根据连接顶点 V 的边的方向性，一个顶点的度有入度和出度之分。

- 入度是以该顶点为端点的入边数量，记为 ID(V)。
- 出度是以该顶点为端点的出边数量，记为 OD(V)。

这样，有向图中，一个顶点 V 的总度便是入度和出度之和，即 D(V)=ID(V)+OD(V)。例如，图 2-28 所示的有向图中，顶点 V_3的入度为 2，出度为 1，因此，顶点 V_3的总度为 3。

4. 邻接顶点

邻接顶点是指图结构中一条边的两个顶点。邻接顶点在有向图和无向图中具有不同的表示。对于无向图，邻接顶点比较简单。例如，在图 2-27 所示的无向图中，顶点 V1 和顶点 V5 互为邻接顶点，顶点 V2 和顶点 V4 互为邻接顶点等。另外，顶点 V1 的邻接顶点有顶点 V2、顶点 V3 和顶点 V5。

对于有向图要稍复杂些，根据连接顶点 V 的边的方向性，两个顶点分别称为起始顶点（起点或始点）和结束顶点（终点）。有向图的邻接顶点分为两类：

- 入边邻接顶点：连接该顶点的边中的起始顶点。例如，对于组成$<V_1，V_2>$这条边的两个顶点，V_1是 V_2的入边邻接顶点。
- 出边邻接顶点：连接该顶点的边中的结束顶点。例如，对于组成$<V_1，V_2>$这条边的两个顶点，V_2是 V_1的出边邻接顶点。

5．无向完全图

如果在一个无向图中，每两个顶点之间都存在一条边，那么这种图结构称为无向完全图。典型的无向完全图，如图 2-29 所示。

理论上可以证明，对于一个包含 N 的顶点的无向完全图，其总的边数为 N(N-1)/2。

6．有向完全图

如果在一个有向图中，每两个顶点之间都存在方向相反的两条边，那么这种图结构称为有向完全图。典型的有向完全图，如图 2-30 所示。

理论上可以证明，对于一个包含 N 的顶点的有向完全图，其总的边数为 N(N-1)。这是无向完全图的两倍，这个也很好理解，因为每两个顶点之间需要两条边。

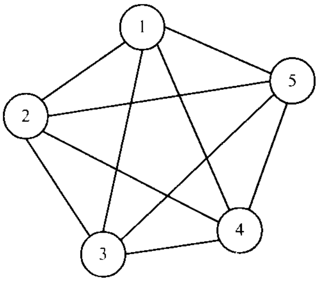


图 2-29　无向完全图

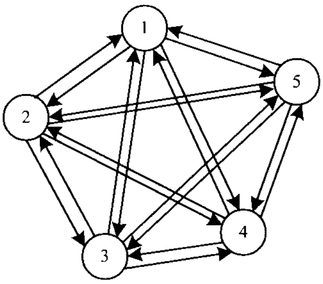


图 2-30　有向完全图

7．子图

子图的概念类似的子集合，由于一个完整的图结构包括顶点和边，因此，一个子图的顶点和边都应该是另一个图结构的子集合。例如，图 2-31 中，图（a）为一个无向图结构，图（b）、图（c）和图（d）均为图（a）的子图。

这里需要强调的是，只有顶点集合是子集的，或者只有边集合是子集的，都不是子图。

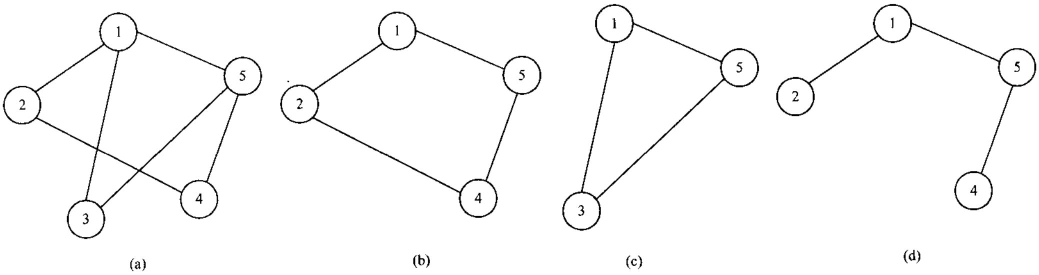


图 2-31　子图

8．路径

路径就是图结构中两个顶点之间的连线，路径上边的数量称为路径长度。两个顶点之间的路径可能途径多个其他顶点，两个顶点之间的路径也可能不止一条，相应的路径长度可能不一样。

典型的图结构中的路径，如图 2-32 所示。这里粗线部分显示了顶点 V_5 到 V_2 之间的一条路径，这条路径途经的顶点为 V_4，途经的边依次为(V_5，V_4)、(V_4，V_2)，路径长度为 2。

同样，我们还可以在该图中找到顶点 V_5 到 V_2 之间的其他路径，分别为：

- 路径(V_5，V_1)、(V_1，V_2)，途经顶点 V1，路径长度为 2。
- 路径(V_5，V_3)、(V_3，V_1)、(V_1，V_2)，途经顶点 V1 和 V3，路径长度为 3。

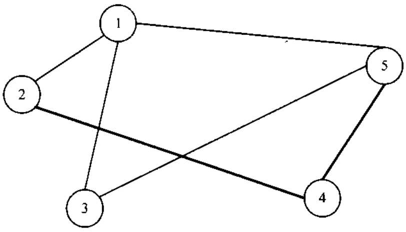


图 2-32　图结构中的一条路径

图结构中的路径还可以细分为如下几种形式：

- 简单路径：在图结构中，如果一条路径上顶点不重复出现，则称为简单路径。
- 环：在图结构中，如果路径的第一个顶点和最后一个顶点相同，则称之为环，有时也称为回路。
- 简单回路：在图结构中，如果除第一个顶点和最后一个顶点相同，其余各顶点都不重复的回路称为简单回路。

9．连通、连通图和连通分量

通过路径的概念，我们可以进一步研究图结构的连通关系，主要涉及如下几点：

- 如果图结构中两个顶点之间有路径，则称这两个顶点是连通的。这里需要注意连通的两个顶点可以不是邻接顶点，只要有路径连接即可，可以途经多个顶点。
- 如果无向图中任意两个顶点都是连通的，那么这个图便称为连通图。如果无向图中包含两个顶点是不连通的，那么这个图便称为非连通图。
- 无向图的极大连通子图称为该图的连通分量。

理论可以证明，对于一个连通图，其连通分量有且只有一个，那就是该连通图自身。而对于一个非连通图，则有可能存在多个连通分量。例如，图 2-33 中，图（a）为一个非连通图，因为其中顶点 V2 和顶点 V3 之间没有路径。这个非连通图中的连通分量包括两个，分别为图（b）和图（c）。

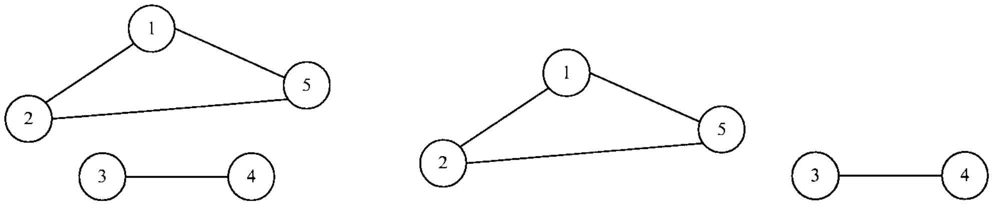


图 2-33　非连通图的连通分量

10．强连通图和强连通分量

与无向图类似，在有向图中也有连通的概念，主要涉及如下几个：

- 如果两个顶点之间有路径，也称这两个顶点是连通的。需要注意的是，有向图中边是有方向的。因此，有时从 V_i 到 V_j 是连通的，但从 V_j 到 V_i 却不一定连通。
- 如果有向图中任意两个顶点都是连通的，则称该图为强连通图。如果有向图中包含两个顶点不是连通的，则称该图为非强连通图。
- 有向图的极大强连通子图称为该图的强连通分量。

理论上可以证明，强连通图只有一个强连通分量，那就是该图自身。而对于一个非强连通图，则有

可能存在多个强连通分量。例如，在图 2-34 中，图（a）为一个非强连通图，因为其中顶点 V2 和顶点 V3 之间没有路径。这个非强连通图中的强连通分量包括两个，分别为图（b）和图（c）。

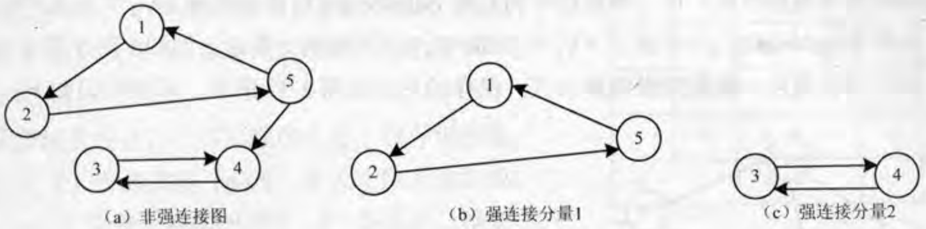


图 2-34　非强连通图的强连通分量

11. 权

在前面介绍图的时候，各个边并没有赋予任何含义。在实际的应用中往往需要将边表示成某种数值，这个数值便是该边的权（Weight）。无向图中加入权值，则称为无向带权图。有向图中加入权值，则称为有向带权图。典型的无向带权图和有向带权图，如图 2-35 所示。

权在实际应用中可以代表各种含义，例如在交通图中表示了道路的长度，在通信网络中表示基站之间的距离，在人际关系中代表亲密程度等。

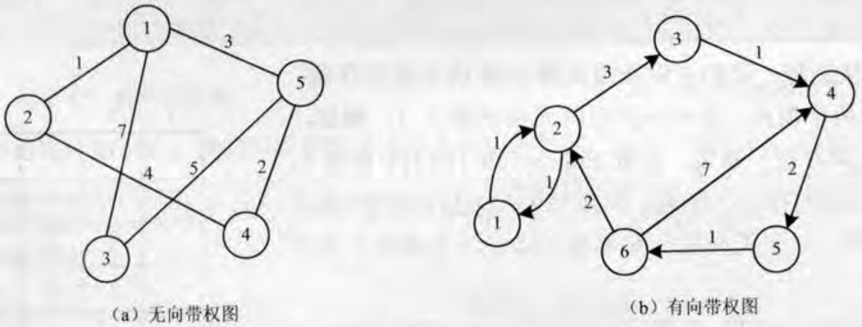


图 2-35　权

12. 网（Network）

网就是边上带有权值的图的另一种名称。网的概念与实际应用更为贴切。

2.8.3　准备数据

有了前面的理论知识后，下面就开始图结构的程序设计。首先需要准备数据，也就是准备在图结构操作中需要用到的变量及数据结构等。由于图是一种复杂的数据结构，顶点之间存在多对多的关系。这样，我们无法简单地将顶点映射到内存中。

在实际应用中，通常需要采用结构数组的形式来单独保存顶点信息，然后采用二维数组的形式保存顶点之间的关系。这种保存顶点之间关系的数组称为邻接矩阵（Adjacency Matrix）。

这样，对于一个包含 n 个顶点的图，可以使用如下的语句来声明一个数组保存顶点信息，声明一个邻接矩阵保存边的权。

```
char[] Vertex=new char[MaxNum];                    //保存顶点信息(序号或字母))
int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];        //保存边的权
```

对于数组 Vertex，其中每一个数组元素保存顶点信息，可以是序号或者字母。而邻接矩阵 EdgeVeight 保存边的权或者连接关系。

在表示连接关系的时候，该二维数组中的元素 EdgeVeight[i][j]=1 表示（V_i, V_j）或<V_i, V_j>构成一条边，如果 EdgeVeight[i][j]=0 表示（V_i, V_j）或<V_i, V_j>不构成一条边。例如，对于图 2-36 所示的无向图。我们可以采用一维数组来保存顶点，保存的形式如图 2-37 所示，示例代码如下：

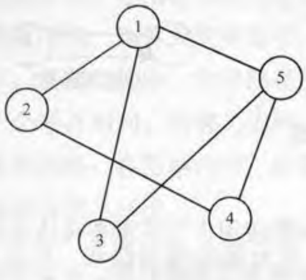


图 2-36　无向图

数组元素序号:	1	2	3	4	5
数组元素值:	1	2	3	4	5

图 2-37　顶点数组

```
Vertex[1]=1;
Vertex[2]=2;
Vertex[3]=3;
Vertex[4]=4;
Vertex[5]=5;
```

对于邻接矩阵，我们可以按照如图 2-38 所示进行存储。对于有边的两个顶点，在对应的矩阵元素中填入 1。例如，V1 和 V3 之间存在一条边，因此 EdgeVeight [1][3]中保存 1，而 V3 和 V1 之间存在一条边，因此 EdgeVeight [3][1]中保存 1。因此可见，对于无向图，其邻接矩阵左下角和右上角是对称的。

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	0	1	0
3	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1
5	1	0	1	1	0

图 2-38　邻接矩阵

对于有向图，如图 2-39 所示。保存顶点的一维数组形式不变，如图 2-40 所示。而对于邻接矩阵，仍然采用二维数组，其保存形式如图 2-41 所示。对于有边的两个顶点，在对应的矩阵元素中保存 1。这里需要注意，边是有方向的。

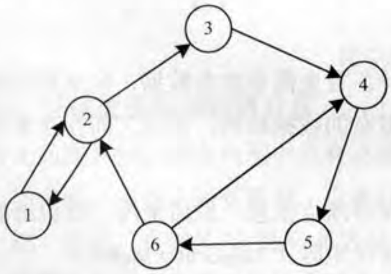


图 2-39　有向图

数组元素序号:	1	2	3	4	5	6
数组元素值:	1	2	3	4	5	6

图 2-40　顶点数组

例如，顶点 V2 到顶点 V3 存在一条边，因此在 EdgeVeight [2][3]中保存 1，而顶点 V3 到顶点 V2 不存在边，因此在 EdgeVeight [3][2]中保存 0。

对于带有权值的图来说，邻接矩阵中可以保存相应的权值。也就是说，此时，有边的项保存对应的权值，而无边的项则保存一个特殊的符号“Z”。例如，对于图 2-42 所示的有向带权图，其对应的邻接矩阵的存储形式，如图 2-43 所示。

这里需要注意的是，在实际程序中为了保存带权值的图，往往定义一个最大值 MAX，其大于所有边的权值之和，用 MAX 来替代特殊的符号“Z”保存在二维数组中。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0

图 2-41　有向图的邻接矩阵

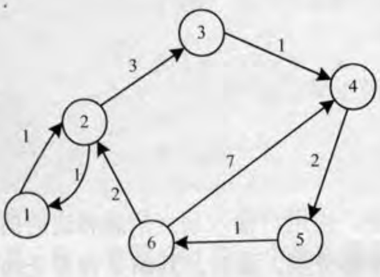


图 2-42　有向带权图

	1	2	3	4	5	6
1	Z	1	Z	Z	Z	Z
2	1	Z	3	Z	Z	Z
3	Z	Z	Z	1	Z	Z
4	Z	Z	Z	Z	2	Z
5	Z	Z	Z	Z	Z	1
6	Z	2	Z	7	Z	Z

图 2-43　有向带权图的邻接矩阵

有了前面的理论知识后，我们可以在程序中准备相应的数据用于保存图结构。示例代码如下：

```
static final int MaxNum=20;                          //图的最大顶点数
static final int MaxValue=65535;                     //最大值(可设为一个最大整数)
class GraphMatrix
{
    char[] Vertex=new char[MaxNum];                  //保存顶点信息(序号或字母)
    int GType;                                       //图的类型(0:无向图，1:有向图)
    int VertexNum;                                   //顶点的数量
    int EdgeNum;                                     //边的数量
    int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];      //保存边的权
    int[] isTrav=new int[MaxNum];                    //遍历标志
}                                                    //定义邻接矩阵图结构
```

这里，定义了图的最大顶点数 MaxNum 和用于保存特殊符号“Z”的最大值 MaxValue。邻接矩阵图结构为 GraphMatrix，其中包括保存顶点信息的数组 Vertex，图的类型 GType、顶点的数量 VertexNum、边的数量 EdgeNum、保存边的权的二维数组 EdgeWeight 以及遍历标志数组 isTrav。

2.8.4　创建图

在使用图结构之前，首先要创建并初始化一个图。代码示例如下：

```
void CreateGraph(GraphMatrix GM)                     //创建邻接矩阵图
{
    int i,j,k;
    int weight;                                      //权
    char EstartV,EendV;                              //边的起始顶点
```

```
        System.out.printf("输入图中各顶点信息\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                              //输入顶点
        {
            System.out.printf("第%d 个顶点:",i+1);
            GM.Vertex[i]=(input.next().toCharArray())[0];        //保存到各顶点数组元素中
        }
        System.out.printf("输入构成各边的顶点及权值:\n");
        for(k=0;k<GM.EdgeNum;k++)                                //输入边的信息
        {
            System.out.printf("第%d 条边: ",k+1);
            EstartV=input.next().charAt(0);
            EendV=input.next().charAt(0);
            weight=input.nextInt();
            for(i=0;EstartV!=GM.Vertex[i];i++);                  //在已有顶点中查找开始点
            for(j=0;EendV!=GM.Vertex[j];j++);                    //在已有顶点中查找终点
            GM.EdgeWeight[i][j]=weight;                          //对应位置保存权值，表示有一条边
            if(GM.GType==0)                                      //若是无向图
            {
                GM.EdgeWeight[j][i]=weight;                      //在对角位置保存权值
            }
        }
    }
```

这里，输入参数 GM 为一个指向图结构的引用。程序中，由用户输入顶点信息和边的信息。对于边来说，需要输入起始顶点、结束顶点和权值，各项以空格分割。最后，判断是否为无向图，因为无向图还需将边的权值保存到对角位置。

2.8.5 清空图

清空图就是将一个图结构变成一个空图，这里只需将矩阵中各个元素设置为 MaxValue 即可。清空图的示例代码如下：

```
    void ClearGraph(GraphMatrix GM)
    {
        int i,j;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                              //清空矩阵
        {
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                GM.EdgeWeight[i][j]=GraphMatrix.MaxValue; //设置矩阵中各元素的值为 MaxValue
            }
        }
    }
```

这里，输入参数 GM 为一个指向图结构的引用。程序中，通过双重循环为矩阵中各个元素赋值 MaxValue，表示这是一个空图。

2.8.6 显示图

显示图就是显示图的邻接矩阵，用户可以通过邻接矩阵方便地了解图的顶点和边等结构信息。显示图的示例代码如下：

```
    void OutGraph(GraphMatrix GM)                                //输出邻接矩阵
    {
```

```
        int i,j;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
        {
            System.out.printf("\t%c",GM.Vertex[j]);             //在第 1 行输出顶点信息
        }
        System.out.printf("\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            System.out.printf("%c",GM.Vertex[i]);
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                if(GM.EdgeWeight[i][j]==GraphMatrix.MaxValue)     //若权值为最大值
                {
                    System.out.printf("\tZ");                   //以 Z 表示无穷大
                }
                else
                {
                    System.out.printf("\t%d",GM.EdgeWeight[i][j]);   //输出边的权值
                }
            }
            System.out.printf("\n");
        }
    }
```

这里，输入参数 GM 为一个指向图结构的引用。在程序中，首先在第 1 行输出顶点信息。然后，逐个输出矩阵中的每个元素。这里，以 Z 表示无穷大 MaxValue。

2.8.7　遍历图

遍历图就是逐个访问图中所有的顶点。由于图的结构复杂，存在多对多的特点。因此，当顺着某一路径访问过某顶点后，可能还会顺着另一路径回到该顶点。同一顶点被多次访问浪费了大量时间，使得遍历的效率低。

为了避免这种情况，我们在图结构中设置了一个数组 isTrav[n]，该数组各元素的初始值为 0，当某个顶点被遍历访问过，则设置对应的数据元素值为 1。在访问某个顶点 i 时，先判断数组 isTrav[i]中的值，如果其值为 1，则继续路径的下一个顶点；如果其值为 0，则访问当前顶点（进行相应的处理），然后继续路径的下一个顶点。

常用的图遍历方法有两种：广度优先法和深度优先法。这里我们以深度优先遍历算法为例进行介绍。深度优先遍历算法类似于树的先序遍历，具体执行过程如下：

（1）从数组 isTrav 中选择一个未被访的顶点 V_i，将其标记为 1，表示已访问。

（2）从 V_i 的一个未被访问过的邻接点出发进行深度优先遍历。

（3）重复步骤（2），直至图中所有和 V_i 有路径相通的顶点都被访问过。

（4）重复步骤（1）至步骤（3）的操作，直到图中所有顶点都被访问过。

深度优先遍历算法是一个递归过程，具体的程序代码示例如下：

```
void DeepTraOne(GraphMatrix GM,int n)                  //从第 n 个结点开始，深度遍历图
{
    int i;
    GM.isTrav[n]=1;                                    //标记该顶点已处理过
    System.out.printf("->%c",GM.Vertex[n]);            //输出结点数据
```

```
        //添加处理节点的操作
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            if(GM.EdgeWeight[n][i]!=GraphMatrix.MaxValue && GM.isTrav[n]==0)
            {
                DeepTraOne(GM,i);                          //递归进行遍历
            }
        }
    }

    void DeepTraGraph(GraphMatrix GM)                      //深度优先遍历
    {
        int i;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                        //清除各顶点遍历标志
        {
            GM.isTrav[i]=0;
        }
        System.out.printf("深度优先遍历结点:");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            if(GM.isTrav[i]==0)                            //若该点未遍历
            {
                DeepTraOne(GM,i);                          //调用函数遍历
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }
```

这里，方法 DeepTraOne()从第 n 个结点开始深度遍历图，其输入参数 GM 为一个指向图结构的引用，输入参数 n 为顶点编号。程序中通过递归进行遍历。

方法 DeepTraGraph()用于执行完整的深度优先遍历，以访问所有的顶点。其中，输入参数 GM 为一个指向图结构的引用。程序中通过调用方法 DeepTraOne()来完成所有顶点的遍历。

2.8.8 图结构操作实例

有了前面的图结构的基本运算之后，我们便可以轻松地完成对图结构的各种操作。我们给出一个完整的例子，来演示图结构的创建和遍历等操作。完整的程序代码示例如下：

【程序 2-6】

```
import java.util.Scanner;

class GraphMatrix
{ static final int MaxNum=20;
     static final int MaxValue=65535;
    char[] Vertex=new char[MaxNum];                        //保存顶点信息(序号或字母)
    int GType;                                             //图的类型(0:无向图，1:有向图)
    int VertexNum;                                         //顶点的数量
    int EdgeNum;                                           //边的数量
    int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];            //保存边的权
    int[] isTrav=new int[MaxNum];                          //遍历标志
}
```

```
public class P2_6 {
    static Scanner input=new Scanner(System.in);
    static void CreateGraph(GraphMatrix GM)                     //创建邻接矩阵图
    {
        int i,j,k;
        int weight;                                             //权
        char EstartV,EendV;                                     //边的起始顶点

        System.out.printf("输入图中各顶点信息\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                             //输入顶点
        {
            System.out.printf("第%d 个顶点:",i+1);
            GM.Vertex[i]=(input.next().toCharArray())[0];       //保存到各顶点数组元素中
        }
        System.out.printf("输入构成各边的顶点及权值:\n");
        for(k=0;k<GM.EdgeNum;k++)                               //输入边的信息
        {
            System.out.printf("第%d 条边：",k+1);
            EstartV=input.next().charAt(0);
            EendV=input.next().charAt(0);
            weight=input.nextInt();
            for(i=0;EstartV!=GM.Vertex[i];i++);                 //在已有顶点中查找开始点
            for(j=0;EendV!=GM.Vertex[j];j++);                   //在已有顶点中查找终结点
            GM.EdgeWeight[i][j]=weight;                         //对应位置保存权值，表示有一条边
            if(GM.GType==0)                                     //若是无向图
            {
                GM.EdgeWeight[j][i]=weight;                     //在对角位置保存权值
            }
        }
    }

    static void ClearGraph(GraphMatrix GM)
    {
        int i,j;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                             //清空矩阵
        {
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                GM.EdgeWeight[i][j]=GraphMatrix.MaxValue;  //设置矩阵中各元素的值为 MaxValue
            }
        }
    }

    static void OutGraph(GraphMatrix GM)                        //输出邻接矩阵
    {
        int i,j;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
        {
            System.out.printf("\t%c",GM.Vertex[j]);             //在第 1 行输出顶点信息
        }
        System.out.printf("\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
```

```
            System.out.printf("%c",GM.Vertex[i]);
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                if(GM.EdgeWeight[i][j]==GraphMatrix.MaxValue)    //若权值为最大值
                {
                    System.out.printf("\tZ");                    //以 Z 表示无穷大
                }
                else
                {
                    System.out.printf("\t%d",GM.EdgeWeight[i][j]);  //输出边的权值
                }
            }
            System.out.printf("\n");
        }
    }

    static  void DeepTraOne(GraphMatrix GM,int n)               //从第 n 个结点开始，深度遍历图
    {
        int i;
        GM.isTrav[n]=1;                                          //标记该顶点已处理过
        System.out.printf("->%c",GM.Vertex[n]);                  //输出结点数据

        //添加处理节点的操作
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            if(GM.EdgeWeight[n][i]!=GraphMatrix.MaxValue && GM.isTrav[n]==0)
            {
                DeepTraOne(GM,i);                                //递归进行遍历
            }
        }
    }

    static void DeepTraGraph(GraphMatrix GM)                     //深度优先遍历
    {
        int i;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                              //清除各顶点遍历标志
        {
            GM.isTrav[i]=0;
        }
        System.out.printf("深度优先遍历结点:");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            if(GM.isTrav[i]==0)                                  //若该点未遍历
            {
                DeepTraOne(GM,i);                                //调用函数遍历
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }

    public static void main(String[] args) {
        GraphMatrix GM=new GraphMatrix();                        //定义保存邻接表结构的图

        System.out.printf("输入生成图的类型:");
```

```
        GM.GType=input.nextInt();                                //图的种类
        System.out.printf("输入图的顶点数量:");
        GM.VertexNum=input.nextInt();                            //输入图顶点数
        System.out.printf("输入图的边数量:");
        GM.EdgeNum=input.nextInt();                              //输入图边数
        ClearGraph(GM);                                          //清空图
        CreateGraph(GM);                                         //生成邻接表结构的图
        System.out.printf("该图的邻接矩阵数据如下:\n");
        OutGraph(GM);                                            //输出邻接矩阵
        DeepTraGraph(GM);                                        //深度优先搜索遍历图

    }
}
```

在主方法中，首先由用户输入图的种类，0 表示无向图，1 表示有向图。然后，由用户输入顶点数和边数。接着清空图，并按照用户输入的数据生成邻接表结构的图。最后，输出邻接矩阵并执行深度优先遍历算法来遍历整个图。

整个程序执行的结果，如图 2-44 所示。这里输入的是一个无向图，包含 4 个顶点和 6 条边。

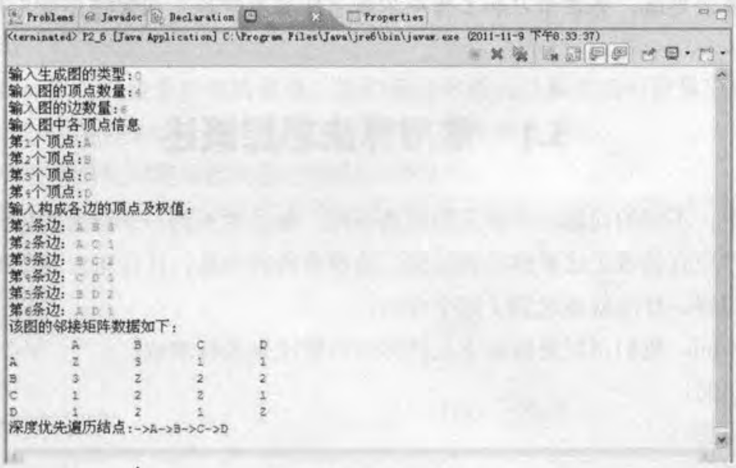


图 2-44　执行结果

2.9 小　　结

数据结构是算法的基础。本章首先介绍了数据结构的基本概念和特点，然后介绍了线性表、顺序表、链表、栈、队列、树和图等典型的数据结构。在介绍每一种数据结构的同时，给出了相应的实现算法和完整的操作实例。读者通过对照这些代码实例可以加深对数据结构理解。

第 3 章　基本算法思想

其实对于程序员来说，学习一门程序语言是非常容易的，难的是如何编写一个高质量的程序。算法可以说是程序的灵魂，一个好的算法往往可以化繁为简、高效率地求解问题。因此，程序员应该重点掌握各种算法思路，并在学习和工作中不断总结算法经验。本章将介绍几种最常用的算法思想及其应用。

3.1　常用算法思想概述

在实际应用中，不同的问题往往解题的思路不同。如果找不到一个合适的思路，那么可能使求解过程变得复杂，更有甚者无法求解得到结果。选择合理的思路，往往可以帮助用户理清问题的头绪，更快地解决问题。算法就是起到了这个作用。

根据问题的不同，我们可以采用如下几种常用的算法来进行求解：

- 穷举算法思想；
- 递推算法思想；
- 递归算法思想；
- 分治算法思想；
- 概率算法思想。

在程序设计中，算法是独立于程序语言的。无论我们采用哪一门程序语言（C、C++、VB、C#、Java 等），都可以使用这些算法。本书主要以 Java 语言为例进行介绍，而对于其他程序设计语言，读者只需根据相应的语法规则进行适当修改就可以了。

3.2　穷举算法思想

穷举算法（Exhaustive Attack method）是最简单的一种算法，其依赖于计算机的强大计算能力，来穷尽每一种可能的情况，从而达到求解问题的目的。穷举算法效率并不高，但是适合于一些没有明显规律可循的场合。

3.2.1　穷举算法基本思想

穷举算法的基本思想就是从所有可能的情况中搜索正确的答案，其执行步骤如下：

（1）对于一种可能的情况，计算其结果。

（2）判断结果是否满足要求，如果不满足则进行执行第（1）步来搜索下一个可能的情况；如果满足要求，则表示寻找到一个正确的答案。

在使用穷举算法时，需要明确问题的答案的范围，这样才可以在指定范围内搜索答案。指定范围之后，就可以使用循环语句和条件判断语句逐步验证候选答案的正确性，从而得到需要的正确答案。

3.2.2　穷举算法实例

穷举算法是最基本的算法思想，我们通过一个简单的例子来看看穷举算法的应用。鸡兔同笼问题最早记载于 1500 年前的《孙子算经》，这是我国古代一个非常有名的问题。鸡兔同笼的原文如下：

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？

这个问题的大致意思是：在一个笼子里关着若干只鸡和若干只兔，从上面数共有 35 个头；从下面数共有 94 只脚。问笼中鸡和兔的数量各是多少？

1．穷举算法

这个问题需要计算鸡的数量和兔的数量，我们通过分析可以知道鸡的数量应该为 0~35 之间的数。这样，我们可以使用穷举法来逐个判断是否符合，从而搜索答案。

采用穷举算法求解鸡兔同笼问题的程序代码示例如下：

```
int qiongJu((int head,int foot)                              //穷举算法
{
    int i,j;

    for(i=0;i<=head;i++)                                     //循环
    {
        j=head-i;
        if(i*2+j*4==foot)                                    //判断，找到答案
        {
            re=1;
             chicken=i;                                      //chicken 代表鸡的个数
             rabbit=j;                                       //rabbit 代表兔的个数
        }
    }
}
```

这里，输入参数 head 为笼中头的个数，输入参数 foot 为笼中脚的个数，chicken 为保存鸡的数量的变量，rabbit 为保存兔的数量的变量。该方法循环改变鸡的个数，然后判断是否满足脚的个数条件，当搜索到符合条件的答案后，返回 1；否则返回 0。

2．穷举算法求解鸡兔同笼问题

有了前面的穷举法求解鸡兔同笼问题的算法，这里我们给出完整的穷举法求解鸡兔同笼问题的程序代码。代码示例如下：

【程序 3-1】

```
import java.util.Scanner;
public class P3_1{
```

```
    static int chichen,habbit; //chichen 代表鸡的个数，habbit 代表兔的个数
    public static    int qiongJu(int head , int foot) {//穷举算法
        int re,i,j;
        re=0;
        for(i=0;i<=head;i++)                                //循环
        {
            j=head-i;
            if(i*2+j*4==foot)                               //判断，找到答案
            {
                re=1;
                    chichen=i;
                    habbit=j;
            }
        }
        return re;
    }
    public static void main(String[] args) {                //主方法
        int re,head,foot;
        System.out.println("穷举法求解鸡兔同笼问题:");
        System.out.print("请输入头数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        head=input.nextInt();                               //输入头数
        System.out.print("请输入脚数：");
        foot=input.nextInt();                               //输入脚数
        re=qiongJu(head,foot);
        if(re==1){
            System.out.println("鸡有"+chichen+"只，兔有"+habbit+"只。");
        }
        else{
            System.out.println("无法求解！");
        }
    }
}
```

在该程序中，首先由用户输入头的数量和脚的数量，然后调用穷举法求解鸡兔同笼问题的方法，最后输出求解的结果。

执行该程序，按照题名的要求输入数据，得到如下结果，如图 3-1 所示。可知，笼中有 23 只鸡和 12 只兔子。

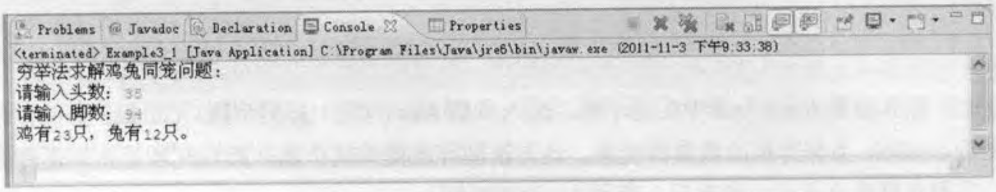


图 3-1　执行结果

3.3　递推算法思想

递推算法是很常用的算法思想，在数学计算等场合有着广泛的应用。递推算法适合有着明显公式规律的场合。

3.3.1　递推算法基本思想

递推算法是一种理性思维模式的代表，其根据已有的数据和关系，逐步推导而得到结果。递推算法的执行过程如下：

（1）根据已知结果和关系，求解中间结果。

（2）判定是否达到要求，如果没有达到，则继续根据已知结果和关系求解中间结果；如果满足要求，则表示寻找到一个正确的答案。

递推算法往往需要用户知道答案和问题之间的逻辑关系。在许多数学问题中，都有着明确的计算公式可以遵循，因此往往可以采用递推算法来实现。

3.3.2　递推算法实例

递推算法是基本的算法思想，常用于数学相关的场合。我们通过一个简单的数学例子，来看看递推算法的应用。

数学里面的斐波那契数列便是一个使用递推算法的经典例子。13 世纪意大利数学家斐波那契的《算盘书》中记载了典型的兔子产仔问题，其大意如下：

如果一对两个月大的兔子以后每一个月都可以生一对小兔子，而一对新生的兔子出生两个月后才可以生小兔子。也就是说，1 月份出生，3 月份才可产仔。那么假定一年内没有产生兔子死亡事件，那么 1 年后共有多少对兔子呢？

1. 递推算法

我们先来分析一下兔子产仔问题。来逐月看一次每月的兔子对数：

第一个月：1 对兔子；

第二个月：1 对兔子；

第三个月：2 对兔子；

第四个月：3 对兔子；

第五个月：5 对兔子；

……

从上面可以看出，从第 3 个月开始，每个月的兔子总对数等于前两个月兔子数的总和。相应的计算公式如下：

第 n 个月兔子总数 $F_n= F_{n-2}+F_{n-1}$。

这里，初始第一个月的兔子数为 $F_1=1$，第二个月的兔子数为 $F_2=1$。

我们可以通过递归公式来求解。为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算斐波那契数列问题。并按照这个思路来编写相应的兔子产仔问题的求解算法，代码示例如下：

```
int Fibonacci(n)                                    //递推算法
{
    int t1,t2;
    if (n==1 || n==2)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
```

```
            t1=Fibonacci(n-1);                          //递归调用
            t2=Fibonacci(n-2);
            return t1+t2;
        }
}
```

这里，输入参数为经历的时间，也就是月数。程序中通过递归调用来实现斐波那契数列的计算。

2. 地推算法求解兔子产仔问题

有了上述通用的兔子产仔问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的兔子产仔问题求解程序代码：

【程序 3-2】

```
import java.util.Scanner;
public class P3_2 {
    public static int fibonacci(int n)
    {
        int t1,t2;
        if(n==1 || n==2)
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            t1=fibonacci(n-1);                          //递归调用
            t2=fibonacci(n-2);
            return t1+t2;
        }
}
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println("递推算法求解兔子产仔问题！");
        System.out.print("请先输入时间：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        int n=input.nextInt();                          //时间
        int num=fibonacci(n);                           //求解
        System.out.println("经过"+n+"月的时间，共能繁殖成"+num+"对兔子！");
    }
}
```

在该程序中，首先由用户输入时间，也就是月数。然后，调用 fibonacci 方法求解计算兔子产仔问题。最后，输出结果。执行该程序，用户输入 12，得到如下结果，如图 3-2 所示。可见，经过 12 个月的时间，共能繁殖成 144 对兔子。

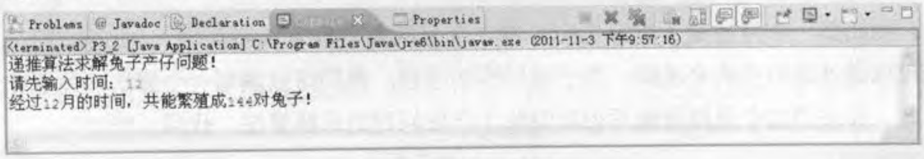


图 3-2　执行结果

3.4　递归算法思想

递归算法是很常用的算法思想。使用递归算法，往往可以简化代码编写，提高程序的可读性。但是，有的适合不合适的递归往往导致程序的执行效率变低。

3.4.1　递归算法基本思想

递归算法就是在程序中不断反复调用自身来达到求解问题的方法。这里的重点是调用自身，这就要求待求解的问题能够分解为相同问题的一个子问题。这样，通过多次递归调用，便可以完成求解。

递归调用是一个方法在其方法体内调用其自身的方法调用方式。这种方法也称为“递归方法”。在递归方法中，主调方法又是被调方法。执行递归方法将反复调用其自身。每调用一次就进入新的一层。

方法的递归调用分两种情况：直接递归和间接递归。

- 直接递归，即在方法中调用方法本身。
- 间接递归，即间接地调用一个方法，如 func_a 调用 func_b，func_b 又调用 func_a。间接递归用得不多。

编写递归方法时，必须使用 if 语句强制方法在未执行递归调用前返回。如果不这样做，在调用方法后，它将永远不会返回，这是一个很容易犯的错误。

采用递归方法可以把算法写得清晰简洁，而且某些问题，特别是与人工智能有关的问题，更适宜用递归方法。但大部分递归例程没有明显地减少代码规模和节省内存空间。递归形式比非递归形式运行速度要慢一些。这是因为附加的方法调用增加了时间开销。但在许多情况下，速度的差别不太明显。

了解递归方法的设计方法和工作原理后，就可对递归的优缺点进行以下总结。

在方法中使用递归的好处有：程序代码更简洁清晰，可读性更好。有的算法用递归表示要比用循环表示简洁精练，而且某些问题，特别是与人工智能有关的问题，更适宜用递归方法，如八皇后问题、汉诺塔问题等。有的算法，用递归能实现，而用循环却不一定能实现。

递归的缺点：大部分递归例程没有明显地减少代码规模和节省内存空间。递归形式比非递归形式运行速度要慢一些。这是因为附加的方法调用增加了时间开销，例如需要执行一系列的压栈出栈等操作。但在许多情况下，速度的差别不太明显。如果递归层次太深，还可能导致堆栈溢出。

3.4.2　递归算法实例

递归算法常用于一些数学计算，或者有明显的递推性质的问题。理解递归最常用的一个例子是编写程序求阶乘问题。

1. 递归算法

所谓阶乘，就是从 1 到指定数之间的所有自然数相乘的结果，n 的阶乘为：

$$n! = n*(n-1)*(n-2)* \cdots\cdots *2 * 1$$

而对于(n-1)!，则有如下的表达式：

$$(n-1)! = (n-1)*(n-2)* \cdots\cdots *2 * 1$$

从上面这两个表达式，我们可以看到阶乘具有明显的递推的性质，也就是符合如下的递推公式：

$$n! = n*(n-1)!$$

因此，我们可以采用递归的思想来计算阶乘。递归算法计算阶乘的代码示例如下：

```
long fact(int n)                                    //求阶乘方法
{
    if(n<=1)
```

```
            return 1;
        else
            return n*fact(n-1);                           //递归
    }
```

其中，输入参数 n 为需要计算的阶乘。在该方法中，当 n<=1 时，n!=1；当 n>1 时，通过递归调用来计算阶乘。方法 fact 是一个递归方法，在该方法内部中，程序又调用了名为 fact 的方法（即自身）。方法的返回值便是 n!。

2．递归算法计算阶乘

有了前面的递归算法求解阶乘问题的算法。下面结合一个例子来看一个阶乘运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 3-3】

```
import java.util.Scanner;
public class P3_3 {
    static long fact(int n)                                   //求阶乘方法
    {
        if(n<=1)
            return 1;
        else
            return n*fact(n-1);                               //递归
    }
    public static void main(String[] args) {
        int i;                                                //声明变量
        System.out.print("请输入要求阶乘的一个整数：");
          Scanner input=new Scanner(System.in);
          i=input.nextInt();                                  //输入数据
          System.out.print(i+"的阶乘结果为："+fact(i));       //调用方法
    }
}
```

该程序中，首先由用户输入一个要求阶乘的整数，然后调用递归方法 fact()来计算阶乘。该程序执行的结果，如图 3-3 所示。

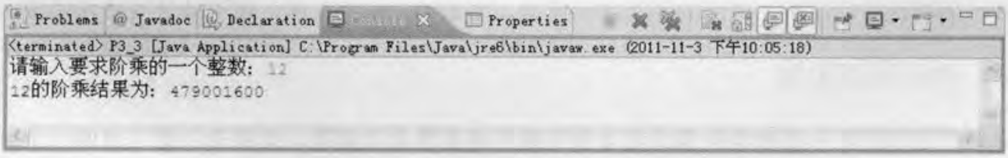


图 3-3　执行结果

从这个问题可以看到，使用递归算法求解阶乘问题的代码比较简洁，易于理解。

3.5　分治算法思想

分治算法是一种化繁为简的算法思想。分治算法往往应用于计算步骤比较复杂的问题，通过将问题简化而逐步得到结果。

3.5.1　分治算法基本思想

分治算法的基本思想是将一个计算复杂的问题分为规模较小，计算简单的小问题求解，然后综合各个小问题，而得到最终问题的答案。分治算法的执行过程如下：

（1）对于一个规模为 N 的问题，若该问题可以容易地解决（比如说规模 N 较小），则直接解决；否则执行下面的步骤。

（2）将该分解为 M 个规模较小的子问题，这些子问题互相独立，并且与原问题形式相同。

（3）递归地解这些子问题。

（4）然后，将各子问题的解合并得到原问题的解。

使用分治算法需要待求解问题能够化简为若干个小规模的相同问题，通过逐步划分，能够达到一个易于求解的阶段而直接进行求解。然后，程序中可以使用递归算法来进行求解。

3.5.2 分治算法实例

我们这里通过一个例子来看分治算法的应用。一个袋子里有 30 个硬币，其中一枚是假币，并且假币和真币一模一样，肉眼很难分辨，目前只知道假币比真币重量轻一点。请问如何区分出假币呢？

1. 分治算法

我们先来分析一下寻找假币问题。可以采用递归分治的思想来求解这个问题，操作步骤如下：

（1）首先为每个银币编号，然后可以将所有的银币等分为两份，放在天平的两边。这样就将区分 30 个硬币的问题，变为区别两堆硬币的问题。

（2）因为假银币的分量较轻，因此天平较轻的一侧中一定包含假银币。

（3）再将较轻的一侧中的硬银币等分为两份，重复上述的做法。

（4）直到剩下两枚硬银币，可用天平直接找出假银币来。

这种方法在银币个数比较多的时候便显示出了优势。我们可以按照这个思路来编写相应的寻找假币问题的求解算法，代码示例如下：

```
int FalseCoin(int coin[],int low,int high)            //算法
{
    int i,sum1,sum2,sum3;
     int re=0;
     sum1=sum2=sum3=0;
    if(low+1==high)
    {
        if(coin[low]<coin[high])
          {
              re=low+1;
              return re;
          }
        else
          {
              re=high+1;
              return re;
          }
    }
    if((high-low+1)%2 == 0)                           //n 是偶数
    {
        for(i=low;i<=low+(high-low)/2;i++)
          {
            sum1= sum1 + coin[i];                     //前半段和
          }
        for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
          {
            sum2 = sum2 + coin[i];                    //后半段和
```

```
            }
            if(sum1>sum2)
              {
                  re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
                  return re;
              }
            else if(sum1<sum2)
              {
                  re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2);
                  return re;
              }
              else
              {
              }
        }
        else
        {
            for(i=low;i<=low+(high-low)/2-1;i++)
              {
                sum1= sum1 + coin[i];                //前半段和
              }
            for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
              {
                sum2 = sum2 + coin[i];               //后半段和
              }
            sum3 = coin[low+(high-low)/2];
            if(sum1>sum2)
              {
                  re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
                return re;
              }
            else if(sum1<sum2)
              {
                  re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2-1);

                return re;
              }
              else
              {
              }
            if(sum1+sum3 == sum2+sum3)

              {
                  re=low+(high-low)/2+1;
                  return re;
              }
    }
    return re;
    }
```

这里，输入参数 coin 为硬币重量数组，输入参数 low 为寻找的起始硬币编号，输入参数 high 为寻找的结束银、硬币编号。该方法的返回值便是假币的位置，也就是假币的编号。程序中严格遵循了前面的分治递归算法，读者可以对照着加深理解。

2．分治算法寻找银币

有了上述通用的分治算法寻找假币问题算法后，我们这里给出完整的寻找假币问题的程序代码：

【程序 3-4】

```
import java.util.Scanner;
public class P3_4 {
    static final int MAXNUM=30;
    static int FalseCoin(int coin[],int low,int high)     //算法
    {
        int i,sum1,sum2,sum3;
         int re=0;
         sum1=sum2=sum3=0;
        if(low+1==high)
        {
            if(coin[low]<coin[high])
              {
                   re=low+1;
                   return re;
              }
            else
              {
                   re=high+1;
                   return re;
              }
        }
        if((high-low+1)%2 == 0)                          //n 是偶数
        {
            for(i=low;i<=low+(high-low)/2;i++)
              {
                 sum1= sum1 + coin[i];                   //前半段和
              }
            for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
              {
                 sum2 = sum2 + coin[i];                  //后半段和
              }
            if(sum1>sum2)
              {
                   re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
                   return re;
              }
            else if(sum1<sum2)
              {
                   re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2);
                   return re;
              }
              else
              {
              }
        }
        else
        {
            for(i=low;i<=low+(high-low)/2-1;i++)
              {
                 sum1= sum1 + coin[i];                   //前半段和
              }
            for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
              {
                 sum2 = sum2 + coin[i];                  //后半段和
              }
            sum3 = coin[low+(high-low)/2];
            if(sum1>sum2)
              {
                   re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
```

```
                    return re;
                }
                else if(sum1<sum2)
                {
                    re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2-1);
                    return re;
                }
                else
                {
                }
                if(sum1+sum3 == sum2+sum3)
                {
                    re=low+(high-low)/2+1;
                    return re;
                }
            }
            return re;
        }
        public static void main(String[] args) {
            int[] coin=new int[MAXNUM];
            int i,n;
            int weizhi;
            System.out.println("分治算法求解假银币问题！");
            System.out.print("请输入银币总的个数：");
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            n=input.nextInt();                              //银币总的个数
            System.out.print("请输入银币的真假：");
            for(i=0;i<n;i++)
            {
                coin[i]=input.nextInt();                    //输入银币的真假
            }
            weizhi=FalseCoin(coin,0,n-1);                   //求解
            System.out.println("在上述"+MAXNUM+"个银币中，第"+weizhi+"个银币是假的！");
        }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入银币总的个数，然后由用户输入银币的真假，最后调用 FalseCoin()方法进行求解。这里，用户输入的银币真假数组用重量来表示，例如以 2 表示真银币的重量，以 1 表示假银币的重量。

执行该程序，得到如下结果，如图 3-4 所示。

图 3-4　执行结果

3.6　概率算法思想

概率算法依照概率统计的思路来求解问题，其往往不能得到问题的精确解，但是在数值计算领域得到了广泛的应用。因为很多数学问题，往往没有或者很难计算解析，这时候便需要通过数值计算来求解近似值。

3.6.1 概率算法基本思想

概率算法执行的基本过程如下：

（1）将问题转化为相应的几何图形 S，S 的面积是容易计算的，问题的结果往往对应几何图形中某一部分 S1 的面积。

（2）然后，向几何图形中随机撒点。

（3）统计几何图形 S 中和 S1 中的点数。根据 S 的面积和 S1 面积的关系以及各图形中的点数来计算得到结果。

（4）判断上述结果是否在需要的精度之内，如果未达到精度则进行执行步骤（2）。如果达到精度，则输出近似结果。

概率算法大致分为如下 4 种形式：

- 数值概率算法；
- 蒙特卡罗（Monte Carlo）算法；
- 拉斯维加斯（Las Vegas）算法；
- 舍伍德（Sherwood）算法；

3.6.2 概率算法实例

我们这里通过一个实例来看看蒙特卡罗（Monte Carlo）概率算法的应用。蒙特卡罗算法的一个典型应用便是计算圆周率 π 。

1. 蒙特卡罗 π 算法思想

下面简单介绍一下使用蒙特卡罗算法计算圆周率 π 的思想。这个思想其实比较简单，我们首先看一个半径为 1 的圆，如图 3-5 所示。首先，对于图中圆的面积有如下公式：

$$S_{圆} = \pi * r^2$$

而图中阴影部分是一个圆的 1/4，因此阴影部分的面积有如下的计算公式：

$$S_{阴影} = S_{圆} / 4 = \frac{\pi * r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

而图中正方形的面积为：

$$S_{正方形} = r^2 = 1$$

这样，按照图示建立一个坐标系。如果均匀地向正方形内撒点，那么落入阴影部分的点数与全部的点数之比应该就是：

$$S_{阴影}/S_{正方形} = \pi/4$$

根据概率统计的规律，只要撒的点足够多，那么将得到近似的结果。通过这个原理便可以计算圆周率 π 的近似值，这就是蒙特卡罗 π 算法。

使用蒙特卡罗算法计算圆周率有如下两个关键点：

- 均匀撒点：在 C 语言中可以使用随机方法来实现，产生[0，1]之间随机的坐标值[x，y]。

- 区域判断：图中阴影部分的特点是距离坐标原点的距离小于等于 1，这样，可以通过计算判断 $x^2+y^2 \leq 1$ 来实现。

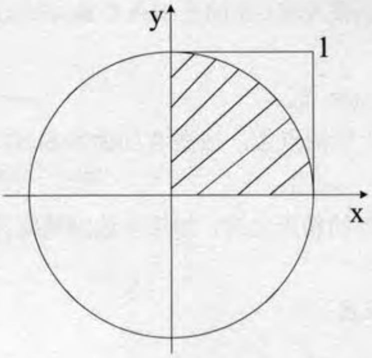


图 3-5　蒙特卡罗算法示意图

蒙特卡罗算法计算圆周率 π 的代码示例如下：

```
double MontePI(int n)                          //蒙特卡罗算法
{
    double PI;
    double x,y;
    int i,sum=0;
    for(i=1;i<n;i++)
    {
        x=Math.random(); //产生 0~1 之间的一个随机数
        y=Math.random(); //产生 0~1 之间的一个随机数
        if((x*x+y*y)<=1)                       //若在阴影区域
            sum++;                             //计数
    }
    PI=4.0*sum/n;                              //计算 PI
    return PI;
}
```

其中，输入参数 n 为撒点的次数。该方法完全遵循了前面的蒙特卡罗算法过程，返回值便是圆周率 π 的近似值。

2. 蒙特卡罗概率算法计算 π 实例

下面结合一个例子来看一个蒙特卡罗概率算法在计算圆周率 π 时的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 3-5】

```
import java.util.Scanner;
public class P3_5 {
    static double MontePI(int n)                        //蒙特卡罗算法
    {
        double PI;
        double x,y;
        int i,sum;
        sum=0;
        for(i=1;i<n;i++)
        {
            x=Math.random();                            //产生 0~1 之间的一个随机数
            y=Math.random();                            //产生 0~1 之间的一个随机数
```

```
            if((x*x+y*y)<=1)                    //若在阴影区域
                sum++;                          //计数
        }
        PI=4.0*sum/n;                           //计算 PI
        return PI;
    }
    public static void main(String[] args) {
        int n;
        double PI;
        System.out.println("蒙特卡罗概率算法计算 π:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.print("输入点的数量:");
        n=input.nextInt();                      //输入撒点个数
        PI=MontePI(n);                          //计算 PI
        System.out.println("PI="+PI);           //输出结果
    }
}
```

在程序中，主方法首先接收用户输入的撒点个数，然后调用 MontePI()算法方法计算圆周率 π 的近似值。该程序执行的结果，如图 3-6 所示。

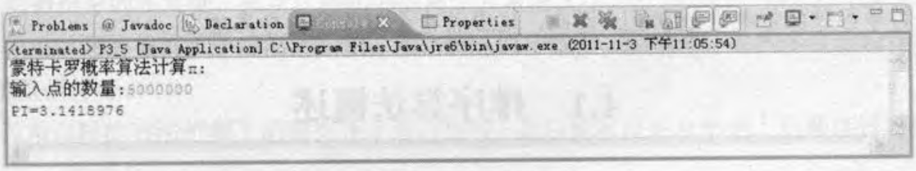


图 3-6　执行结果

读者可以多次执行该程序，会发现撒点的数量越多，圆周率 π 计算的精度也就越高。同时，由于概率算法的随机性，在不同的运行时间，即使输入同样的撒点数，得到的结果也是不相同的。

3.7　小　结

算法是程序员的一门必修课。选择合适的算法往往能够提高解决问题的效率。本章介绍了几种常用的程序设计算法思想，包括穷举算法思想、递推算法思想、递归算法思想、分治算法思想和概率算法思想。读者应该认真掌握这些算法的基本思路及其应用，这对以后的程序设计工作将非常有益。

第 4 章　排序算法

在各类算法问题中，排序算法是最基本的问题。现实生活中很多方面都需要将一些数据按从小到大或者从大到小的顺序来进行排列。对于一个排序好的序列来说，在查找最大值、最小值、遍历、计算和求解等各种操作都十分方便。因此，这里首先介绍各种排序算法。

4.1　排序算法概述

排序（Sort）是将一组数据按照一定的规则进行排列的，一般按递增或递减的顺序来进行排列。排序算法是一种最基本的算法。排序虽然看似是一个很简单的问题，但是在实际的应用场合往往面临一些困难。这是因为实际应用中的数据量往往很庞大，这样算法的效率和排序的速度就是一个很大的问题。我们往往需要寻找一个高效的排序算法，因此便演变出了多种排序算法。

常用的排序算法，如图 4-1 所示。最基本的排序法包括交换排序、选择排序、插入排序和合并排序。其中，交换排序主要包括冒泡排序法和快速排序法；选择排序主要包括选择排序法和堆排序法；插入排序主要包括插入排序法和 Shell 排序法。

上述几种基本排序算法直接对计算机内存中的数据进行排序。而对于一些大的文件，由于计算机的内存有效，往往不能直接将其读入内存进行排序。这时可以采用多路归并排序法，将文件划分为几个能够读入内存的小部分，然后分别读入进行排序，经过多次处理便可以完成大文件的排序。

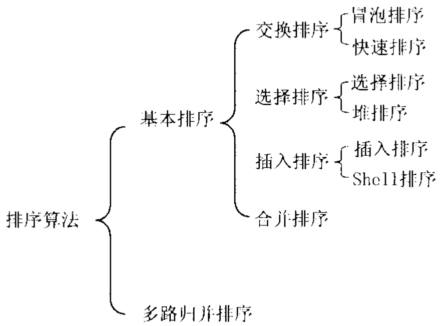


图 4-1　排序算法的分类

每一种排序算法都有其各种的特点，往往在某些特点的场合具有比较好的执行效率。因此，读者需要根据实际问题的需要来合理选择排序算法。下面，我们便对每一种排序算法进行详细的讲解。

在实际应用中，基本的排序对象是整数，而基本排序规则包括从小到大排序和从大到小排序。这里，我们在介绍的过程中主要以整型数据从小到大进行排序为例来讲解。对于其他类型的数据，或者从大到小的排序方法均类似。

4.2　冒泡排序法

冒泡排序法（Bubble Sort）是所有排序算法中最简单、最基本的一种。冒泡排序法的思路就是交换排序，通过相邻数据的交换来达到排序的目的。

4.2.1　冒泡排序算法

冒泡排序算法通过多次比较和交换来实现排序，其排序流程如下：

（1）对数组中的各数据，依次比较相邻的两个元素的大小。

（2）如果前面的数据大于后面的数据，就交换这两个数据。经过第一轮的多次比较排序后，便可把最小的数据排好。

（3）再用同样的方法把剩下的数据逐个进行比较，最后便可按照从小到大的顺序排好数组各数据的顺序。

为了更清晰地理解冒泡排序算法的执行过程，这里我们举一个实际数据的例子来一步一步地执行冒泡排序算法。对于 5 个整型数据 118、101、105、127、112，这是一组无序的数据。对其执行冒泡排序过程，如图 4-2 所示。冒泡排序算法的执行步骤如下：

图 4-2　冒泡排序算法的执行过程

（1）第 1 次排序，从数组的尾部开始向前依次比较。首先是 127 和 112 比较，由于 127 大于 112，因此将数据 112 向上移了一位；同理，118 和 101 比较，将数据 101 向前移了一位。此时排序后的数据为 101、118、105、112、127。

（2）第 2 次排序，从数组的尾部开始向前依次比较。由于 105 和 118 比较，可以将数据 105 向前移一位。此时排序后的数据为 101、105、118、112、127。

（3）第 3 次排序，从数组的尾部开始向前依次比较。由于 112 和 118 比较，可以将数据 118 向前移一位。此时排序后的数据为 101、105、112、118、127。

（4）第 4 次排序时，此时，各个数据已经按顺序排列好，所以无须在进行数据交换。此时，排序的结果为 101、105、112、118、127。

从上面的例子，读者可以非常直观地了解到冒泡排序算法的执行过程。整个排序过程可以形象地类似于水泡的浮起过程，故因此而得名。冒泡排序算法在对 N 个数据进行排序时，无论原数据有无顺序，都需要进行 N-1 步的中间排序。这种排序方法思路简单直观，但是缺点就是执行的步骤有点长，效率不是很高。

一种改进的方法，就是在每次中间排序之后，比较一下数据是否已经按照顺序排列完成。如果排列完成则退出排序过程，否则便继续进行冒泡排序。这样，对于数据比较有规则的，可以加速算法的执行过程。

冒泡排序算法的示例代码如下：

```
void bubbleSort(int[] a)                                //冒泡排序法
{
int temp;

for (int i = 1; i < a.length; i++)
{
            for (int j = 0; j < a.length - i; j++)
        {
                if (a[j] > a[j + 1])                    //将相邻两个数进行比较，较大的数往后冒泡
            {
            //交换相邻两个数
                temp=a[j];
                a[j]=a[j+1];
                a[j+1]=temp;
                }
        }
        System.out.print("第"+i+"步排序结果:");        //输出每步排序的结果
        for(int k=0;k<a.length;k++)
        {
                System.out.print(" "+a[k]);             //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个数组的首地址。待排序的原数据便保存在数组 a 中，程序中通过两层循环来对数据进行冒泡排序。读者可以结合前面的冒泡排序算法加深理解。这里，为了让读者清楚排序算法的执行过程，在排序的每一步都输出了当前的排序结果。

4.2.2 冒泡排序算法实例

有了前面的冒泡排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子说明冒泡排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-1】

```
public class P4_1
{
    static final int SIZE=10;

    public static void bubbleSort(int[] a)
    {
            int temp;
```

```
        for (int i = 1; i < a.length; i++) {
                for (int j = 0; j < a.length - i; j++)
            {
                if (a[j] > a[j + 1]){                    //将相邻两个数进行比较，较大的数往后冒泡
                //交换相邻两个数
                    temp=a[j];
                    a[j]=a[j+1];
                    a[j+1]=temp;
                }
            }
            System.out.print("第"+i+"步排序结果:");      //输出每步排序的结果
            for(int k=0;k<a.length;k++)
            {
                System.out.print(" "+a[k]);               //输出
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));    //初始化数组
        }
        System.out.print("排序前的数组为：\n");           //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");
        bubbleSort(shuzu);                                //排序操作
        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");               //输出排序后的数组
        }
        System.out.print("\n");

    }
}
```

在这里，程序定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先声明一个整型数组，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用冒泡排序算法的方法来对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-3 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。从中可以看出从第四步之后便已经完成对数据的排序，但是算法仍然还需要进行后续比较步骤。读者可以根据前面介绍的思路，加入判断部分，使之能够尽早结束排序过程，从而提高程序的执行效率。

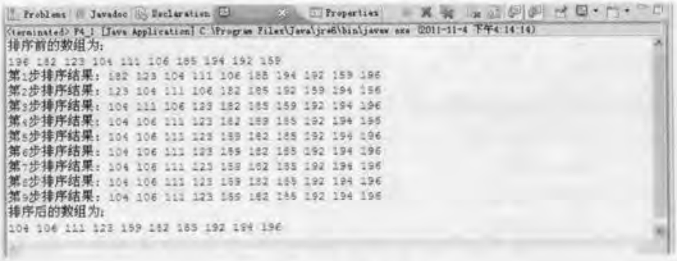


图 4-3　执行结果

4.3　选择排序法

选择排序（Selection Sort）也是比较简单的排序算法，思路也比较直观。选择排序算法在每一步中选取最小值来重新排列，从而达到排序的目的。

4.3.1　选择排序算法

选择排序算法通过选择和交换来实现排序，其排序流程如下：

（1）首先从原始数组中选择最小的 1 个数据，将其和位于第 1 个位置的数据交换。

（2）接着从剩下的 n-1 个数据中选择次小的 1 个元素，将其和第 2 个位置的数据交换。

（3）然后，这样不断重复，直到最后两个数据完成交换。至此，便完成了对原始数组的从小到大的排序。

为了更清晰地理解选择排序算法的执行过程，这里我们举一个实际数据的例子来一步一步地执行选择排序算法。对于 5 个整型数据 118、101、105、127、112，这是一组无序的数据。对其执行选择排序过程，如图 4-4 所示。选择排序算法的执行步骤如下：

图 4-4　选择排序算法的执行过程

（1）第 1 次排序，从原始数组中选择最小的数据，这个数据便是 101，将其与第一个数据 118 进行交换。此时排序后的数据为 101、118、105、127、112。

（2）第 2 次排序，从剩余的数组中选择最小的数据，这个数据便时 105，将其与第二个数据 118 进行交换。此时排序后的数据为 101、105、118、127、112。

（3）第 3 次排序，从剩余的数组中选择最小的数据，这个数据便时 112，将其与第三个数据 118 进行交换。此时排序后的数据为 101、105、112、127、118。

（4）第 4 次排序，从剩余的数组中选择最小的数据，这个数据便时 118，将其与第四个数据 127

进行交换。此时排序后的数据为 101、105、112、118、127。

从上面的例子，读者可以非常直观地了解到选择排序算法的执行过程。选择排序算法在对 N 个数据进行排序时，无论原数据有无顺序，都需要进行 N-1 步的中间排序。这种排序方法思路很简单直观，但是缺点就是执行的步骤有点长，效率也不是很高。

选择排序算法的示例代码如下：

```
void selectSort(int[] a)                          //选择法排序
{
    int index;
    int temp;                                     //交换临时变量

    for (int i = 0; i < a.length-1; i++)
    {
        index = i;
        for (int j = i+1; j <a.length; j++)
        {
            if (a[j] < a[index])
            {
                index = j;
            }
        }
        //交换两个数
        if(index!=i)
        {
        temp=a[i];
        a[i]=a[index];
        a[index]=temp;
        }

        System.out.print("第"+i+"步排序结果:");      //输出每步排序的结果
        for(int h=0;h<a.length;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);           //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个数组的首地址。待排序的原数据便保存在数组 a 中，程序中通过两层循环来对数据进行选择排序。读者可以结合前面的选择排序算法来加深理解。这里，为了让读者清楚排序算法的执行过程，在排序的每一步都输出了当前的排序结果。

4.3.2 选择排序算法实例

有了前面的选择排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明选择排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-2】

```
public class P4_2
{
    static final int SIZE=10;
    public static void selectSort(int[] a)
```

```
        {
            int index,temp;
            for (int i = 0; i < a.length-1; i++)
            {
                index = i;
                for (int j = i+1; j <a.length; j++)
                {
                    if (a[j] < a[index])
                    {
                        index = j;
                    }
                }
                //交换两个数
                if(index!=i)
                {
                temp=a[i];
                a[i]=a[index];
                a[index]=temp;
                }
                System.out.print("第"+i+"步排序结果:");        //输出每步排序的结果
                for(int h=0;h<a.length;h++)
                {
                    System.out.print(" "+a[h]);                  //输出
                }
                System.out.print("\n");
            }
        }
        public static void main(String[] args)
        {
            int[] shuzu=new int[SIZE];
            int i;

            for(i=0;i<SIZE;i++)
            {
                shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1)); //初始化数组
            }

            System.out.print("排序前的数组为：\n");           //输出排序前的数组
            for(i=0;i<SIZE;i++)
            {
                System.out.print(shuzu[i]+" ");
            }

            System.out.print("\n");

            selectSort(shuzu);                                //排序操作

            System.out.print("排序后的数组为：\n");
            for(i=0;i<SIZE;i++)
            {
                System.out.print(shuzu[i]+" ");               //输出排序后的数组
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
```

在这里，程序定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先声明一个整型数组，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用选择排序算法方法来对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-5 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

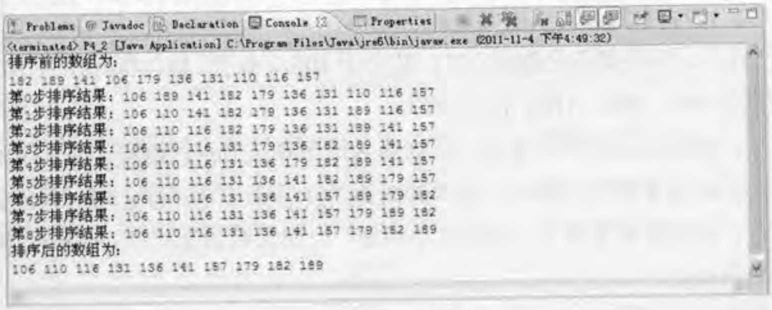


图 4-5　执行结果

4.4　插入排序法

插入排序（Insertion Sort）法通过对未排序的数据执行逐个插入至合适的位置而完成排序工作。插入排序算法的思路也是比较简单的，使用比较多。

4.4.1　插入排序算法

插入排序算法通过比较和插入来实现排序，其排序流程如下：

（1）首先对数组的前两个数据进行从小到大的排序。

（2）接着将第 3 个数据与排好序的两个数据比较，将第 3 个数据插入到合适的位置。

（3）然后，将第 4 个数据插入到已排好序的前 3 个数据中。

（4）不断重复上述过程，直到把最后一个数据插入合适的位置。最后，便完成了对原始数组从小到大的排序。

为了更清晰地理解插入排序算法的执行过程，这里我们举一个实际数据的例子来一步一步地执行插入排序算法。对于 5 个整型数据 118、101、105、127、112，这是一组无序的数据。对其执行插入排序过程，如图 4-6 所示。插入排序算法的执行步骤如下：

图 4-6　插入排序算法的执行过程

（1）第 1 次排序，首先对数组的前两个数据 118 和 101 排序，由于 118 大于 101，因此将其交

换。此时排序后的数据为 101、118、105、127、112。

（2）第 2 次排序，对于第三个数据 105，其大于 101，而小于 118，将其插入它们之间。此时排序后的数据为 101、105、118、127、112。

（3）第 3 次排序，对于第四个数据 127，其大于 118，将其插入 118 之后。此时排序后的数据为 101、105、118、127、112。

（4）第 4 次排序，对于第五个数据 112，其大于 105，小于 118，将其插入 105 和 118 之间。此时排序后的数据为 101、105、112、118、127。

从上面的例子，读者可以非常直观地了解到插入排序算法的执行过程。插入排序算法在对 N 个数据进行排序时，无论原数据有无顺序，都需要进行 N-1 步的中间排序。这种排序方法思路很简单直观，在数据已有一定顺序的情况下，排序效率较好。但如果数据无规则，则需要移动大量的数据，其排序效率也不是很好。

插入排序算法的示例代码如下：

```
void insertionSort(int[] a)                          //插入排序
{
int i,j,t,h;

    for (i=1;i<a.length;i++)                         //循环处理
    {
        t=a[i];
        j=i-1;
        while(j>=0 && t<a[j])
        {
            a[j+1]=a[j];
            j--;
        }
        a[j+1]=t;

        System.out.print("第"+i+"步排序结果:");        //输出每步排序的结果
        for(h=0;h<a.length;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);              //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个数组的首地址，待排序的原数据便保存在数组 a 中。

在程序中，首先将需要插入的元素保存到变量 t 中。变量 j 表示需要插入的位置，一般就是插入数组元素的序号。设置变量 j 的值为 i-1，表示准备将当前位置（序号为 i）的数插入到序号为 i-1（即前一个元素）的位置。

接着，算法程序通过 while 循环来进行判断，如果序号为 j 元素的数据大于变量 t（需要插入的数据），则将序号为 j 的元素向后移，同时变量 j 减 1，以判断前一个数据是否还需要向后移。通过这个 while 循环，找到一个元素的值比 t 小，该元素的序号为 j。然后，将在序号为 j 的下一个元素进行数据插入操作。

读者可以结合前面的插入排序算法来加深理解。这里，为了让读者清楚排序算法的执行过程，在排序的每一步都输出了当前的排序结果。

4.4.2 插入排序算法实例

有了前面的插入排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明插入排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-3】

```
public class P4_3
{
    static final int SIZE=10;
    static void insertionSort(int[] a)                          //插入排序
    {
        int i,j,t,h;
        for (i=1;i<a.length;i++)
        {
            t=a[i];
            j=i-1;
            while(j>=0 && t<a[j])
            {
                a[j+1]=a[j];
                j--;
            }
            a[j+1]=t;

            System.out.print("第"+i+"步排序结果:");               //输出每步排序的结果
            for(h=0;h<a.length;h++)
            {
                System.out.print(" "+a[h]);                     //输出
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));          //初始化数组
        }
        System.out.print("排序前的数组为：\n");                  //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");

        insertionSort(shuzu);                                   //排序操作

        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");                     //输出排序后的数组
        }
```

```
                System.out.print("\n");
        }
}
```

在这里，程序宏定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主函数中，首先初始化随机种子，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用插入排序算法函数来对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-7 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

图 4-7　执行结果

4.5　Shell 排序法

前面介绍的冒泡排序算法、选择排序算法和插入排序算法，虽然思路比较直观，但是排序的效率比较低。对于大量的数据需要排序的时候，我们往往需要寻求其他更为高效的排序算法。Shell 排序算法便是其中一种。

4.5.1　Shell 排序算法

Shell 排序算法严格来说基于插入排序的思想，其又称为希尔排序或者缩小增量排序。Shell 排序算法的排序流程如下：

（1）将有 n 个元素的数组分成 n/2 个数字序列，第 1 个数据和第 n/2+1 个数据为一对，……

（2）一次循环使每一个序列对排好顺序。

（3）然后，再变为 n/4 个序列，再次排序。

（4）不断重复上述过程，随着序列减少最后变为一个，也就完成了整个排序。

为了更清晰地理解 Shell 排序算法的执行过程，这里我们举一个实际数据的例子来一步一步地执行 Shell 排序算法。对于 6 个整型数据 127、118、105、101、112、100，这是一组无序的数据。对其执行 Shell 排序过程，如图 4-8 所示。Shell 排序算法的执行步骤如下：

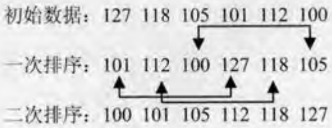


图 4-8　Shell 排序算法的执行过程

（1）第 1 次排序，首先将数组分为 6/2=3 个数字序列，第 1 个数据 127 和第 4 个数据 101 为一对，第 2 个数据 118 和第 5 个数据 112 为一对，第 3 个数据 105 和第 6 个数据 100 为一对。每一对

数据进行排序，此时排序后的数据为 101、112、100、127、118、105。

（2）第 2 次排序，将数组分为 6/4=1 个序列（这里执行的取整操作），此时逐个对数据比较，按照插入排序算法对这个序列进行排序。排序后的数据为 100、101、105、112、118、127。

从上面的例子，读者可以非常直观地了解到 Shell 排序算法的执行过程。其实在前面我们已知道，插入排序时，如果原数据已经是基本有序的，则排序的效率就可大大提高。另外，对于数量较小的序列使用直接插入排序，因需要移动的数据量较少，其效率也较高。因此，Shell 排序算法具有比较高的执行效率。

Shell 排序算法的示例代码如下：

```
void shellSort(int[] a)                                        //Shell 排序
{
    int i,j,h;
    int r,temp;
    int x=0;

    for(r=a.length/2;r>=1;r/= 2)                               //划组排序
    {
        for(i=r;i<a.length;i++)
        {
            temp=a[i];
            j=i-r;
            while(j>=0 && temp<a[j])
            {
                a[j+r]=a[j];
                j-=r;
            }
            a[j+r]=temp;
        }

        x++;
        System.out.print("第"+x+"步排序结果:");                //输出每步排序的结果
        for(h=0;h<a.length;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);                        //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个数组的首地址，待排序的原数据便保存在数组 a 中。

在程序中使用了三重循环嵌套。最外层的循环，用来分解数组元素为多个序列，每次比较两数的间距，直到其值为 0 就结束循环。下面一层循环按设置的间距 r，分别比较对应的数组元素。在该循环中使用插入排序法对指定间距的元素进行排序。

读者可以结合前面的 Shell 排序算法来加深理解。这里，为了让读者清楚排序算法的执行过程，在排序的每一步都输出了当前的排序结果。

4.5.2　Shell 排序算法实例

有了前面的 Shell 排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明 Shell 排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-4】

```
public class P4_4
{
    static final int SIZE=10;

    static void shellSort(int[] a)                              //Shell 排序
    {
        int i,j,h;
        int r,temp;
        int x=0;

        for(r=a.length/2;r>=1;r/= 2)                            //划组排序
        {
            for(i=r;i<a.length;i++)
            {
                temp=a[i];
                j=i-r;
                while(j>=0 && temp<a[j])
                {
                    a[j+r]=a[j];
                    j-=r;
                }
                a[j+r]=temp;
            }

            x++;
            System.out.print("第"+x+"步排序结果:");              //输出每步排序的结果
            for(h=0;h<a.length;h++)
            {
                System.out.print(" "+a[h]);                     //输出
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));          //初始化数组
        }
        System.out.print("排序前的数组为：\n");                  //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");

        shellSort(shuzu);                                       //排序操作

        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
```

```
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");                    //输出排序后的数组
        }
        System.out.print("\n");

    }
}
```

在这里，程序宏定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主函数中，首先初始化随机种子，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用 Shell 排序算法函数对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-9 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

图 4-9　执行结果

4.6　快速排序法

快速排序（Quick Sort）法和冒泡排序算法类似，都是基于交换排序思想的。快速排序对冒泡排序法进行了改进，从而具有更高的执行效率。

4.6.1　快速排序算法

快速排序算法通过多次比较和交换来实现排序，其排序流程如下：

（1）首先设定一个分界值，通过该分界值将数组分成左右两部分。

（2）将大于等于分界值的数据集中到数组右边，小于分界值的数据集中到数组的左边。此时，左边部分中各元素都小于等于分界值，而右边部分中各元素都大于等于分界值。

（3）然后，左边和右边的数据可以独立排序。对于左侧的数组数据，又可以取一个分界值，将该部分数据分成左右两部分，同样将左边放置较小值，右边放置较大值。右侧的数组数据也可以做类似处理。

（4）重复上述过程，可以看出，这是一个递归定义。通过递归将左侧部分排好序后，再递归排好右侧部分的顺序。当左、右两个部分各数据排序完成后，整个数组的排序也就完成了。

为了更清晰地理解快速排序算法的执行过程，这里我们举一个实际数据的例子来一步一步地执行快速排序算法。对于 8 个整型数据 69、62、89、37、97、17、28、49，这是一组无序的数据。对其执行快速排序过程，如图 4-10 所示。快速排序算法的执行步骤如下：

（1）首先选取一个分界值，这里选择第一个数据 69 作为分界值。在变量 left 中保存数组的最小序号 0，在变量 right 中保存数组的最大序号 7，在变量 base 中保存分界值 69。

（2）从数组右侧开始，逐个取出数据与分界值 69 比较，直到找到比 base 小的数据为止。这里，数组最右侧的元素 A[right]的值 49 就比 base 变量中保存的值 69 小。

（3）将右侧比基准 base 小的数（数组元素 A[right]中的数）保存到 A[left]（A[0]）元素中。

（4）接下来，从数组左侧开始，逐个取出元素与分界值 69 比较，直到找到比分界值 69 大的数据为止。这里，数组最左侧的元素 A[left]（即 A[0]）的值为 49，比 base 的值小，将 left 自增 1（值为 1）。再取 A[left]（A[1]）的值 62 与 base 的值 69 比较，62 小于 69，继续将 left 自增 1（值为 2）。再取 A[left]（A[2]）的值 89 与 base 比较，因 89 大于 69，结束查找。

（5）将左侧比分界值 69 大的数（数组元素 A[2]）保存到 A[right]（A[7]）元素中。

（6）将分界值 69 中的值保存到 A[left]（A[2]）中，最后得到的结果如图 4-10 所示。

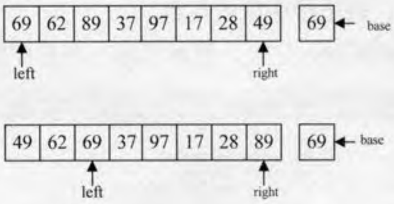


图 4-10　快速排序算法的执行过程

经过这一次分割，base 数据左侧（也就是 left 所指向的数据）的数比分界值 69 小，而 base 数据右侧的数比 base 大。

（7）接下来，通过递归调用，将 left 左侧的数据进行同样的排序，再将 left 右侧的数据进行同样的排序。

经过这样的递归调用，最终可将数据完成排序操作。

快速排序算法的示例代码如下：

```
void quickSort(int[] arr,int left,int right)                    //快速排序算法
{
    int f,t;
    int rtemp,ltemp;

    ltemp=left;
    rtemp=right;
    f=arr[(left+right)/2];                                       //分界值
    while(ltemp<rtemp)
    {
        while(arr[ltemp]<f)
        {
            ++ltemp;
        }
        while(arr[rtemp]>f)
        {
            --rtemp;
        }
        if(ltemp<=rtemp)
        {
            t=arr[ltemp];
            arr[ltemp]=arr[rtemp];
                arr[rtemp]=t;
            --rtemp;
                ++ltemp;
        }
```

```
        }
        if(ltemp==rtemp)
        {
            ltemp++;
        }

        if(left<rtemp)
        {
            quickSort(arr,left,ltemp-1);                    //递归调用
        }
        if(ltemp<right)
        {
            quickSort(arr,rtemp+1,right);                   //递归调用
        }
    }
```

在这里，输入参数 arr 一般为一个数组的首地址，输入参数 left 指向数组最左边的值，输入参数 right 指向数组最右边的值。

程序中首先确定分界值为数组中间位置的值，当然也可以选在其他位置，比如数组的第一个数据。然后按照快速排序法的思路进行处理。接着，通过递归调用，处理分界值左侧的元素和右侧的元素。读者可以结合前面的快速排序算法来加深理解。

4.6.2 快速排序算法实例

有了前面的快速排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明快速排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-5】

```
public class P4_5 {
    static final int SIZE=18;
    static void quickSort(int[] arr,int left,int right)           //快速排序算法
    {
        int f,t;
        int rtemp,ltemp;

        ltemp=left;
        rtemp=right;
        f=arr[(left+right)/2];                                    //分界值
        while(ltemp<rtemp)
        {
            while(arr[ltemp]<f)
            {
                ++ltemp;
            }
            while(arr[rtemp]>f)
            {
                --rtemp;
            }
            if(ltemp<=rtemp)
            {
                t=arr[ltemp];
                arr[ltemp]=arr[rtemp];
                arr[rtemp]=t;
```

```
                --rtemp;
                ++ltemp;
            }
        }
        if(ltemp==rtemp)
        {
            ltemp++;
        }

        if(left<rtemp)
        {
            quickSort(arr,left,ltemp-1);                    //递归调用
        }
        if(ltemp<right)
        {
            quickSort(arr,rtemp+1,right);                   //递归调用
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1)); //初始化数组
        }

        System.out.print("排序前的数组为：\n");             //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");

        quickSort(shuzu,0,SIZE-1);                          //排序操作

        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");                 //输出排序后的数组
        }
        System.out.print("\n");

    }

}
```

在这里，程序宏定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先初始化随机种子，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用快速排序算法的方法对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-11 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

图 4-11　执行结果

4.7 堆 排 序 法

堆排序（Heap Sort）法是基于选择排序思想的，其利用堆结构和二叉树的一些性质来完成数据的排序。堆排序在某些场合具有广泛的应用。

4.7.1 堆排序算法

相对于前面几种排序算法，堆排序比较新颖，设计的概念比较多。这里首先介绍什么是堆结构、堆排序的过程，然后介绍堆排序的算法实现。

1. 什么是堆结构

堆排序的关键是首先构造堆结构。那么什么是堆结构呢？堆结构是一种树结构，准确地说是一个完全二叉树。在这个树中每个结点对应于原始数据的一个记录，并且每个结点应满足以下条件：

- 如果按照从小到大的顺序排序，要求非叶结点的数据要大于或等于其左、右子结点的数据。
- 如果按照从大到小的顺序排序，要求非叶结点的数据要小于或等于其左、右子结点的数据。

我们这里以从小到大的顺序进行排序为例进行介绍。从堆结构的定义可以看出，对结点的左子结点和右子结点的大小没有要求，只规定父结点和子结点数据之间必须满足的大小关系。这样，如果要求按照从小到大的顺序输出数据时，则堆结构的根结点为要求的最大值。

2. 堆排序过程

一个完整的堆排序需要经过反复的两个步骤：构造堆结构和堆排序输出。下面我们首先看看如果构造堆结构。

构造堆结构就是把原始的无序数据按前面堆结构的定义进行调整。首先，需要将原始的无序数据放置到一个完全二叉树的各个结点中，这可以按照前面介绍的方法来实现。

然后，由完全二叉树的下层向上层逐层进行父子结点的数据进行比较，使父结点的数据大于子结点的数据。这里需要使用“筛”运算进行结点数据的调整，直到使所有结点最后满足堆结构的条件为止。筛运算主要针对非叶结点进行调整。

例如，对于一个非叶结点 A_i，这里假定 A_i 的左子树和右子树均已进行筛运算，也就是说其左子树和右子树均已构成堆结构。下面，对 A_i 进行筛运算，操作步骤如下：

（1）比较 A_i 的左子树和右子树的最大值，将最大值放在 A_j 中。

（2）将 A_i 的数据与 A_j 的数据进行比较，如果 A_i 大于等于 A_j，表示以 A_i 为根的子树已构成堆结构。便可以终止筛运算。

（3）如果 A_i 小于 A_j，则将 A_i 与 A_j 互换位置。

（4）经过第（3）步后，可能会破坏以 A_i 为根的堆，因为此时 A_i 的值为原来的 A_j。下面以 A_j

为根重复前面的步骤，直到满足堆结构的定义，也就是父结点数据大于子结点。这样，以 A_j 为根的子树就被调整为一个堆。

在执行筛运算时，值较小的数据将被逐层下移，这就是称为“筛”运算的原因。

下面我们通过一个实际的例子来看看构造堆结构的过程和堆排序输出的过程，以便于加深读者的理解。假设有 8 个需要排序的数据序列 67、65、77、38、97、3、33、49。构造堆结构的操作步骤如下：

（1）首先将原始的数据构成一个完全二叉树，如图 4-12 所示。

（2）最后一个非叶结点为结点 4，对该结点进行筛运算。因该结点只有左子树，也就是结点 8，并且 38 小于 49。按照堆结构定义，对这两个结点进行互换位置。这样，结点 4 及其子结点构成一个堆结构，如图 4-13 所示。

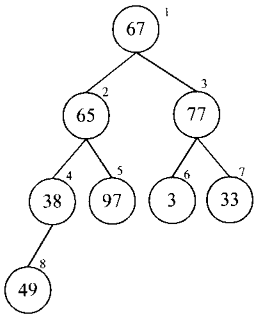


图 4-12　完全二叉树

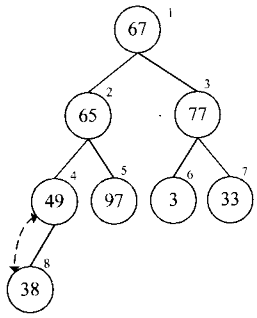


图 4-13　交换结点 4 和结点 8

（3）上述二叉树中倒数第 2 个非叶结点是结点 3，对该结点进行筛运算。因结点 3 的两个子结点中结点 7 的值较大，因此使结点 3 与结点 7 进行比较。因为 77 大于 33，此时不需要进行互换，结点 3 及其子结点已经构成堆结构，如图 4-14 所示。

（4）上述二叉树中倒数第 3 个非叶结点是结点 2，对该结点进行筛运算。因结点 2 的两个子结点中结点 5 的值较大，因此使结点 2 与结点 5 进行比较。因为 65 小于 97，此时需要将结点 2 与结点 5 互换数据。这样结点 2 及其子结点构成堆，如图 4-15 所示。

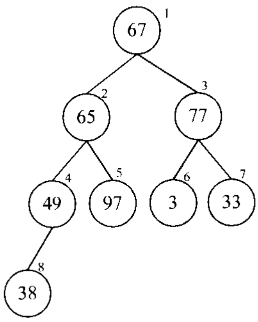


图 4-14　结点 3 及子结点构成堆结构

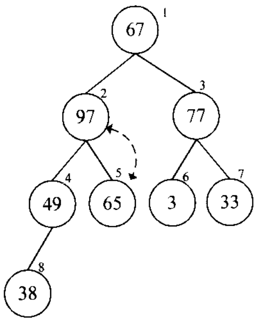


图 4-15　交换结点 2 和结点 5

（5）上述二叉树中倒数第 4 个非叶结点是结点 1，对该结点进行筛运算。因结点 1 的两个子结点中结点 2 的值较大，因此使结点 1 与结点 2 进行比较。因为 67 小于 97，因此将结点 1 与结点 2 互换数据。这时，因结点 2 的值已改变，需要重新对结点 2 及其子结点进行筛运算，因为有可能破

坏了结点 2 与其子结点构成的堆结构。这样，结点 1 及其子结点构成堆结构，如图 4-16 所示。

至此，便将原始的数据序列构造成一个堆结构。下面便可以进行堆排序输出，从而完成整个排序过程。操作步骤如下：

（1）根据堆结构的特点，堆结构的根结点也就是最大值。我们这里采用的是从小到大排序，因此将其放到数组的最后。因此，将结点 8 的值与结点 1 互换，如图 4-17 所示。

（2）结点 8 的值 38 换到根结点后，对除最后一个结点外的其他结点重新执行前面介绍的构造堆过程。此时，得到的堆结构，如图 4-18 所示。

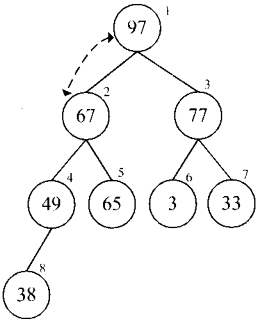


图 4-16　最终的堆结构

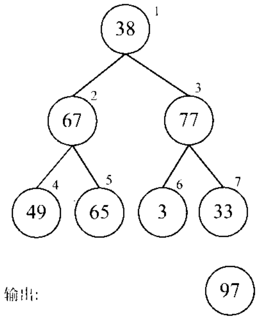


图 4-17　结点 8 与结点 1 互换

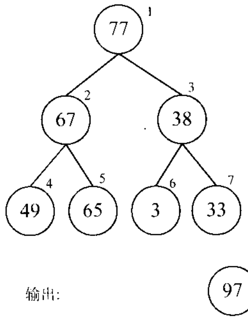


图 4-18　重新构造堆结构

（3）重复上述过程，取此时堆结构的根结点（最大值）进行交换，放在数组的后面。此时，结点 1 和结点 7 互换，如图 4-19 所示。

（4）然后重复将剩余的数据构造堆结构，取根结点与最后一个结点交换，将得到图 4-20 所示的结果。

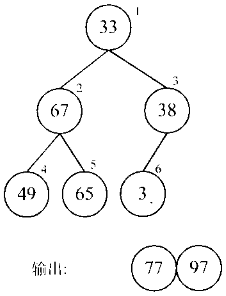


图 4-19　结点 1 与结点 7 互换

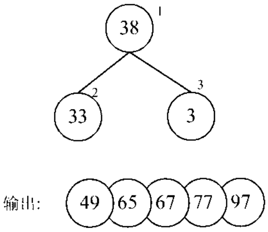


图 4-20　重复上述过程

（5）再进一步执行堆排序输出，结点 1 与结点 3 互换，得到图 4-21 所示的结果。

（6）对最后的两个数据进行处理，得到最终的输出结果，如图 4-22 所示。

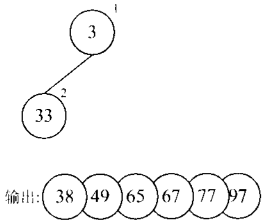


图 4-21　结点 1 与结点 3 互换

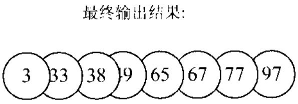


图 4-22　最终结果

这样便完成了堆排序过程，得到的排序结果为：3、33、38、49、65、67、77、97。

3．堆排序算法

理解了上述的堆排序算法后，我们便可以编写相应的算法。堆排序算法的示例代码如下：

```
void heapSort(int a[],int n)                    //堆排序
{
    int i,j,h,k;
    int t;

    for(i=n/2-1;i>=0;i--)                       //将 a[0,n-1]建成大根堆
    {
        while(2*i+1<n)                          //第 i 个结点有右子树
        {
            j=2*i+1 ;
            if((j+1)<n)
            {
                if(a[j]<a[j+1])                 //右左子树小于右子树，则需要比较右子树
                    j++;                        //序号增加 1，指向右子树
            }
            if(a[i]<a[j])                       //比较 i 与 j 为序号的数据
            {
                t=a[i];                         //交换数据
                a[i]=a[j];
                a[j]=t;
                i=j ;                           //堆被破坏，需要重新调整
            }
            else                                //比较左右子结点均大则堆未破坏，不再需要调整
            {
                break;
            }
        }
    }
    //输出构成的堆
    System.out.print("原数据构成的堆:");
    for(h=0;h<n;h++)
    {
        System.out.print(" "+a[h]);             //输出
    }
    System.out.print("\n");

    for(i=n-1;i>0;i--)
    {
        t=a[0];                                 //与第 i 个记录交换
        a[0] =a[i];
        a[i] =t;
        k=0;
        while(2*k+1<i)                          //第 i 个结点有右子树
        {
            j=2*k+1 ;
            if((j+1)<i)
            {
                if(a[j]<a[j+1])                 //右左子树小于右子树，则需要比较右子树
                {
                    j++;                        //序号增加 1，指向右子树
```

```
                }
            }
            if(a[k]<a[j])                                //比较 i 与 j 为序号的数据
            {
                t=a[k];                                  //交换数据
                a[k]=a[j];
                a[j]=t;
                k=j ;                                    //堆被破坏，需要重新调整
            }
            else                                         //比较左右子结点均大则堆未破坏，不再需要调整
            {
                break;
            }
        }

        System.out.print("第"+(n-i)+"步排序结果:");      //输出每步排序的结果
        for(h=0;h<n;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);                  //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

这里，输入参数 a 为保存以线性方式保存的二叉树的数组，输入参数 n 为数组的长度。程序中反复执行构造堆结构和堆排序输出，严格遵循了前述的算法步骤，读者可以对照前面的讲解加深理解。为了让读者清楚排序过程，程序中还输出了每步排序的结果。

4.7.2　堆排序算法实例

有了前面的堆排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明堆排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-6】

```
public class P4_6 {
    static final int SIZE=10;
    static void heapSort(int a[],int n)                  //堆排序
    {
        int i,j,h,k;
        int t;

        for(i=n/2-1;i>=0;i--)                            //将 a[0,n-1]建成大根堆
        {
            while(2*i+1<n)                               //第 i 个结点有右子树
            {
                j=2*i+1 ;
                if((j+1)<n)
                {
                    if(a[j]<a[j+1])                      //右左子树小于右子树，则需要比较右子树
                        j++;                             //序号增加 1，指向右子树
                }
                if(a[i]<a[j])                            //比较 i 与 j 为序号的数据
                {
                    t=a[i];                              //交换数据
```

```
                a[i]=a[j];
                a[j]=t;
                i=j ;                                  //堆被破坏，需要重新调整
            }
            else                                       //比较左右子结点均大则堆未破坏，不再需要调整
            {
                break;
            }
        }
    }
    //输出构成的堆
    System.out.print("原数据构成的堆:");
    for(h=0;h<n;h++)
    {
        System.out.print(" "+a[h]);  //输出
    }
    System.out.print("\n");

    for(i=n-1;i>0;i--)
    {
        t=a[0];                                        //与第 i 个记录交换
        a[0] =a[i];
        a[i] =t;
        k=0;
        while(2*k+1<i)                                 //第 i 个结点有右子树
        {
            j=2*k+1 ;
            if((j+1)<i)
            {
                if(a[j]<a[j+1])                        //右左子树小于右子树，则需要比较右子树
                {
                    j++;                               //序号增加 1，指向右子树
                }
            }
            if(a[k]<a[j])                              //比较 i 与 j 为序号的数据
            {
                t=a[k];                                //交换数据
                a[k]=a[j];
                a[j]=t;
                k=j ;                                  //堆被破坏，需要重新调整
            }
            else                                       //比较左右子结点均大则堆未破坏，不再需要调整
            {
                break;
            }
        }

        System.out.print("第"+(n-i)+"步排序结果:");  //输出每步排序的结果
        for(h=0;h<n;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);                //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

```
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));            //初始化数组
        }

        System.out.print("排序前的数组为：\n");                      //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");

        heapSort(shuzu,SIZE);                                      //排序操作

        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");                        //输出排序后的数组
        }
        System.out.print("\n");

    }

}
```

在这里，程序定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先初始化随机种子，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用堆排序算法的方法来对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-23 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

图 4-23　执行结果

4.8　合并排序法

合并排序（Merge Sort）就是将多个有序数据表合并成一个有序数据表。如果参与合并的只有两个有序表，那么称为二路合并。对于一个原始的待排序序列，往往可以通过分割的方法来归结为多路合并排序。这里，我们以二路合并为例，来介绍实现合并排序的算法。

4.8.1 合并排序算法

一个待排序的原始数据序列进行合并排序的基本思路是，首先将含有 n 个结点的待排序数据序列看做有 n 个长度为 1 的有序子表组成，将他们依次两两合并，得到长度为 2 的若干有序子表；然后，再对这些子表进行两两合并，得到长度为 4 的若干有序子表；……，重复上述过程，一直重复到最后的子表长度为 n，从而完成排序过程。

1. 合并排序算法原理

下面我们通过一个实际的例子来看看合并排序算法的执行过程，以便于加深读者的理解。假设有 9 个需要排序的数据序列 67、65、77、38、97、3、33、49、34。合并排序算法的操作步骤如下：

（1）首先将 9 个原始数据看成 9 个长度为 1 的有序子表。每一个子表中只有一个数据，因此无所谓有序无序了，这里可以认为单个数据是有序的。

（2）将这 9 个有序子表两两合并，这里为了方便，将相邻的进行两两合并。例如，将第 1、2 个合并在一起、第 3、4 个合在一起，……，最后一个没有合并的，就单独放在那里，直接进入下一遍合并，如图 4-24 所示。

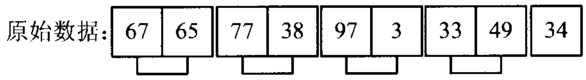


图 4-24　9 个有序子表两两合并

（3）经过第 1 遍的合并，得到长度为 2 的有序表序列，再将这些长度为 2 的有序表序列进行两两合并，如图 4-25 所示。

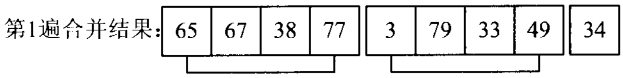


图 4-25　第 1 遍合并结果

（4）重复两两合并，经过第 2 遍合并，得到长度为 4 的有序表序列，再将这些长度为 4 的有序表进行两两合并，如图 4-26 所示。

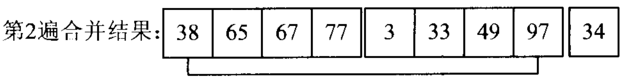


图 4-26　第 2 遍合并结果

（5）经过第 3 遍合并，得到长度为 8 的有序表序列，以及最后只有一个元素的序列，如图 4-27 所示。

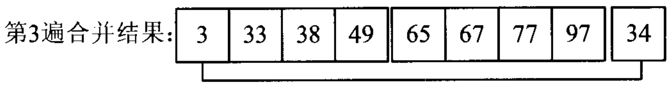


图 4-27　第 3 遍合并结果

（6）将这两个序列进行合并，即可完成合并排序，最后的结果如图 4-28 所示。

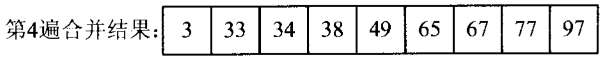


图 4-28　第 4 遍合并结果

在上述二路合并排序过程中，每一遍合并都要经过若干次的二路合并。因此，这个算法的关键便是二路合并。通过多次的二路合并完成一遍完整的合并，经过多遍的完整合并最终完成合并排序算法。

2. 合并排序算法

理解了上述的合并排序算法后，我们便可以编写相应的算法。合并排序算法的示例代码如下：

```
void mergeOne(int a[],int b[],int n,int len)                //完成一遍合并的函数
{
    int i,j,k,s,e;
    s=0;
    while(s+len<n)
    {
        e=s+2*len-1;
        if(e>=n)                                            //最后一段可能少于 len 个结点
        {
            e=n-1;
        }
        //相邻有序段合并
        k=s;
        i=s;
        j=s+len;
        while(i<s+len && j<=e)                              //如果两个有序表都未结束时，循环比较
        {
            if(a[i]<=a[j])                                  //如果较小的元素复制到数组 b 中
            {
                b[k++]=a[i++];
            }
            else
            {
                b[k++]=a[j++];
            }
        }
        while(i<s+len)                                      //未合并的部分复制到数组 b 中
        {
            b[k++]=a[i++];
        }
        while(j<=e)
        {
            b[k++]=a[j++];                                  //未合并的部分复制到数组 b 中
        }

        s=e+1;                                              //下一对有序段中左段的开始下标
    }
    if(s<n)                                                 //将剩余的一个有序段从数组 A 中复制到数组 b 中
    {
        for(;s<n;s++)
        {
            b[s]=a[s];
        }
    }
}
void mergeSort(int a[],int n)                               //合并排序
{
```

```
        int h,count,len,f;

        count=0;                                            //排序步骤
        len=1;                                              //有序序列的长度
        f=0;                                                //变量 f 作标志
        int[] p=new int[n];
        while(len<n)
        {
            if(f==1)                                        //交替在 A 和 P 之间合并
            {
                mergeOne(p,a,n,len);                        //p 合并到 a
            }
            else
            {
                mergeOne(a,p,n,len);                        //a 合并到 p
            }
            len=len*2;                                      //增加有序序列长度
            f=1-f;                                          //使 f 值在 0 和 1 之间切换

            count++;
            System.out.printf("第"+count+"步排序结果:");      //输出每步排序的结果
            for(h=0;h<SIZE;h++)
            {
                System.out.printf(" "+a[h]); //输出
            }
            System.out.print("\n");

        }
        if(f==1)                                            //如果进行了排序
        {
            for(h=0;h<n;h++)                                //将内存 p 中的数据复制回数组 a
            {
                a[h]=p[h];
            }
        }
    }
```

在这里，MergeOne()方法用于完成一遍完整的合并排序，MergeSort 方法便是完整的合并排序算法。

在 MergeOne()方法中，输入参数 a 为一个数组，用来保存待排序的数据，输入参数 b 为一个数组，用来保存合并后的数据，参数 n 表示数组 a 中需要进行排序的元素总数，参数 len 表示每个有序子表的长度。

在 MergeSort()方法中，输入参数 a 为一个数组，用来保存待排序的数据，输入参数 n 为数组的长度。MergeSort 函数中通过多次调用 MergeOne 函数来完成一遍完整的合并排序。程序中严格遵循了前述的算法步骤，读者可以对照前面的讲解来加深理解。为了让读者清楚排序过程，程序中还输出了每步排序的结果。

需要注意的是，二路合并排序算法往往需要申请较大的辅助内存空间，这个辅助空间的大小与待排序原始序列一样多。

4.8.2 合并排序算法实例

有了前面的合并排序算法的基本思想和算法之后。这里通过一个完整的例子来说明合并排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-7】

```
public class P4_7 {
    static final int SIZE=15;
    static void mergeOne(int a[],int b[],int n,int len)      //完成一遍合并的函数
    {
        int i,j,k,s,e;

        s=0;
        while(s+len<n)
        {
            e=s+2*len-1;
            if(e>=n)                                          //最后一段可能少于 len 个结点
            {
                e=n-1;
            }
            //相邻有序段合并
            k=s;
            i=s;
            j=s+len;
            while(i<s+len && j<=e)                            //如果两个有序表都未结束时，循环比较
            {
                if(a[i]<=a[j])                                //如果较小的元素复制到数组 b 中
                {
                    b[k++]=a[i++];
                }
                else
                {
                    b[k++]=a[j++];
                }
            }
            while(i<s+len)                                    //未合并的部分复制到数组 b 中
            {
                b[k++]=a[i++];
            }
            while(j<=e)
            {
                b[k++]=a[j++];                                //未合并的部分复制到数组 b 中
            }

            s=e+1;                                            //下一对有序段中左段的开始下标
        }
        if(s<n)                                               //将剩余的一个有序段从数组 A 中复制到数组 b 中
        {
            for(;s<n;s++)
            {
                b[s]=a[s];
            }
        }
    }
    static void mergeSort(int a[],int n)                      //合并排序
    {
        int h,count,len,f;

        count=0;                                              //排序步骤
```

```
        len=1;                                              //有序序列的长度
        f=0;                                                //变量 f 作标志

        int[] p=new int[n];
        while(len<n)
        {
            if(f==1)                                        //交替在 A 和 P 之间合并
            {
                mergeOne(p,a,n,len);                        //p 合并到 a
            }
            else
            {
                mergeOne(a,p,n,len);                        //a 合并到 p
            }
            len=len*2;                                      //增加有序序列长度
            f=1-f;                                          //使 f 值在 0 和 1 之间切换

            count++;
            System.out.printf("第"+count+"步排序结果:");     //输出每步排序的结果
            for(h=0;h<SIZE;h++)
            {
                System.out.printf(" "+a[h]);                //输出
            }
            System.out.print("\n");

        }
        if(f==1)                                            //如果进行了排序
        {
            for(h=0;h<n;h++)                                //将内存 p 中的数据复制回数组 a
            {
                a[h]=p[h];
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));      //初始化数组
        }

        System.out.print("排序前的数组为：\n");              //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            System.out.print(shuzu[i]+" ");
        }
        System.out.print("\n");

        mergeSort(shuzu,SIZE);                              //排序操作

        System.out.print("排序后的数组为：\n");
        for(i=0;i<SIZE;i++)
```

```
            {
                System.out.print(shuzu[i]+" ");                    //输出排序后的数组
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
```

在这里，程序定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先声明整型数组，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用合并排序算法方法来对数组进行排序。最后，输出排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-29 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

图 4-29　执行结果

4.9　排序算法的效率

排序算法有很多种，每种算法都有其优缺点，可适应不同的场合。速度是决定排序算法最主要的因素，其是排序效率的一个重要指标。一般来说，我们可从以下几方面判断一个排序算法的优劣：

- 计算的复杂度：为了全面考虑，往往从最差、平均和最好三种情况进行评价。
- 系统资源的占用：主要包括内存以及其他资源的占用。一个好的排序算法应该占用少的内存资源。在本章介绍的排序算法中，大部分排序算法都只需要使用 1 个元素的存储单元，用来交换数据。而合并排序算法需使用与原始序列一样长的 n 个元素的存储单元，用来保存多遍合并操作。因此，合并排序算法的系统资源占用要大。

对于计算的复杂度，一般依据排序数据量的大小 n 来度量，主要表征了算法执行速度。这是算法优劣的一个重要指标。对于本章前面介绍的几种排序算法，其相应的计算复杂度如下：

- 冒泡排序法，平均速度为 $O(n^2)$，最坏情况下的速度为 $O(n^2)$；
- 快速排序法，平均速度为 $O(n\log n)$，最坏情况下的速度为 $O(n^2)$；
- 选择排序法，平均速度 $O(n^2)$，最坏情况下的速度为 $O(n^2)$；
- 堆排序法，平均速度为 $O(n\log n)$，最坏情况下的速度为 $O(n\log n)$；
- 插入排序法，平均速度为 $O(n^2)$，最坏情况下的速度为 $O(n^2)$；
- Shell 排序法，平均速度为 $O(n^{3/2})$，最坏情况下的速度为 $O(n^2)$；
- 合并排序法，平均速度为 $O(n\log n)$，最坏情况下的速度为 $O(n\log n)$ 。

其实，在排序算法中还有一个特殊的概念，那就是稳定排序算法。稳定排序算法主要是依照相等的关键字维持记录的相对次序来进行排序。通俗地讲，当有两个有相等关键字的数据 D1 和 D2，在待排序的数据中 D1 出现在 D2 之前，在排序过后的数据中 D1 也在 D2 之前，那么这就是一个稳定排序算法。

在本章前面介绍的几种排序算法中，冒泡排序法、插入排序法和合并排序法都是稳定排序算法，而选择排序法、Shell 排序法、快速排序法和堆排序法都不是稳定排序算法。

其实，没有某一种排序算法是绝对好的，不同的排序算法各有优劣。在实际应用中，需要根据实际的问题来选择合适的排序算法。如果数据量 n 较小的时候，可采用插入排序法或选择排序法；当数据量 n 较大的时候，则应采用时间复杂度为 O(*n*log*n*)的排序方法，如快速排序、堆排序或合并排序。如果待排序的原始数据程随机分布，那么快速排序算法的平均时间最短。

这样，有了上述知识后，我们便可以根据实际问题的需要来选择合适的排序算法，以便达到更高的算法执行效率。

4.10 排序算法的其他应用

前面介绍的各种排序算法，都是以从小到大的顺序对整型数据序列进行排序，这是最基本的排序。在实际应用中，往往还需要其他一些数据类型的排序。我们都可以根据需要对上述算法进行适当修改来满足特定应用的需求。

4.10.1 反序排序

我们前面介绍的都是从小到大的顺序对数组进行排序，所谓反序排序就是从大到小的顺序对数组进行排序。其实反序排序实现起来也比较方便，只需对上述的算法进行稍加修改便可以实现。

我们这里以插入排序算法为例，从大到小的反序插入排序算法的示例代码如下：

```
void insertionSort(int[] a,int len)                    //从大到小的插入排序
{
    int i,j,t,h;

    for (i=1;i<len;i++)
    {
        t=a[i];
        j=i-1;
        while(j>=0 && t>a[j])                          //从大到小的顺序
        {
            a[j+1]=a[j];
            j--;
        }
        a[j+1]=t;

        System.out.print("第"+i+"步排序结果:");          //输出每步排序的结果
        for(h=0;h<len;h++)
        {
            System.out.print(" "+a[h]);                //输出
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个数组的首地址，输入参数 len 为数组的大小，待排序的原数据便保存在数组 a 中。

在程序中，首先将需要插入的元素保存到变量 t 中。变量 j 表示需要插入的位置，一般就是插入数组元素的序号。设置变量 j 的值为 i-1，表示准备将当前位置（序号为 i）的数插入到序号为 i-1（即前一个元素）的位置。

接着，算法程序通过 while 循环来进行判断，如果序号为 j 元素的数据小于变量 t（需要插入的数据），则将序号为 j 的元素向后移，同时变量 j 减 1，以判断前一个数据是否还需要向后移。通过这个 while 循环，找到一个比 t 大的元素的值，该元素的序号为 j。然后，将在序号为 j 的下一个元素进行数据插入操作。

读者可以结合前面的插入排序算法加深理解。这里，为了让读者清楚排序算法的执行过程，在排序的每一步都输出了当前的排序结果。

有了前面的从大到小的反序插入排序算法之后。这里通过一个完整的例子说明反序插入排序法在整型数组排序中的应用，程序示例如下：

【程序 4-8】

```
public class P4_8 {
    static final int SIZE=10;
    static void insertionSort(int[] a,int len)                    //插入排序
    {
        int i,j,t,h;

        for (i=1;i<len;i++)
        {
            t=a[i];
            j=i-1;
            while(j>=0 && t>a[j])                                 //反序
            {
                a[j+1]=a[j];
                j--;
            }
            a[j+1]=t;

            System.out.print("第"+i+"步排序结果:");                //输出每步排序的结果
            for(h=0;h<len;h++)
            {
                System.out.print(" "+a[h]);                       //输出
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[SIZE];
        int i;

        for(i=0;i<SIZE;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));            //初始化数组
        }

        System.out.print("排序前的数组为：\n");                    //输出排序前的数组
        for(i=0;i<SIZE;i++)
```

```
            {
                System.out.print(shuzu[i]+" ");
            }
            System.out.print("\n");

            insertionSort(shuzu,SIZE);                           //排序操作

            System.out.print("排序后的数组为：\n");
            for(i=0;i<SIZE;i++)
            {
                System.out.print(shuzu[i]+" ");                  //输出排序后的数组
            }
            System.out.print("\n");
        }

    }
```

在这里，程序宏定义了符号常量 SIZE，用于表征需要排序整型数组的大小。在主方法中，首先初始化随机种子，然后对数组进行随机初始化，并输出排序前的数组内容。接着，调用反序插入排序算法方法的来对数组进行排序。最后，输出从大到小排序后的数组。

该程序执行的结果，如图 4-30 所示。这里，显示了每一步排序的中间结果。

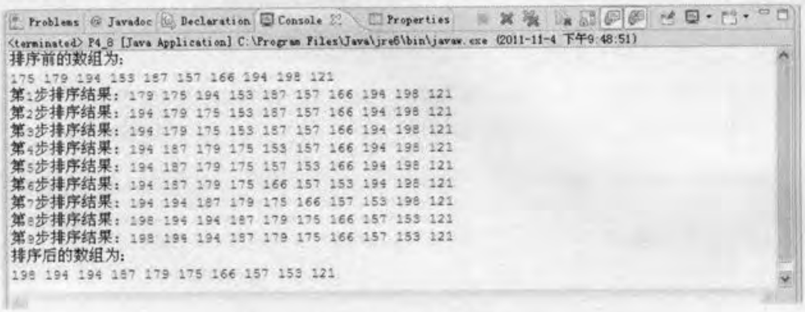


图 4-30　执行结果

4.10.2　字符串数组的排序

前面介绍了几种常用的排序算法，都是针对整型数据排序的。在实际应用中有时需要对字符串数组进行排序。此时，可以建立一个指向字符串的字符指针数组，在排序需要交换字符串的位置时，只需要交换指针即可。这样，仍然可以借鉴前述的排序算法，进行稍加修改即可。

这里举例说明快速排序法在字符串数组排序中的应用，这种修改的快速排序算法示例如下：

```
static void quickSort(String[] arr,int left,int right)          //快速排序算法
{
    String  f,t;
    int rtemp,ltemp;

    ltemp=left;
    rtemp=right;
    f=arr[(left+right)/2];                                    //分界值
    while(ltemp<rtemp)
    {
        while(arr[ltemp].compareTo(f)<0)
        {
```

```
                ++ltemp;
            }
            while(arr[rtemp].compareTo(f)>0)
            {
                --rtemp;
            }
            if(ltemp<=rtemp)
            {
                t=arr[ltemp];
                arr[ltemp]=arr[rtemp];
                arr[rtemp]=t;
                --rtemp;
                ++ltemp;
            }
        }
        if(ltemp==rtemp)
        {
            ltemp++;
        }

        if(left<rtemp)
        {
            quickSort(arr,left,ltemp-1);                    //递归调用
        }
        if(ltemp<right)
        {
            quickSort(arr,rtemp+1,right);                   //递归调用
        }
    }
```

在这里，输入参数 arr 一般为一个字符串数组的首地址，输入参数 left 指向数组最左边的值，输入参数 right 指向数组最右边的值。

有了这个字符串数组的快速排序算法之后。这里通过一个完整的例子来说明快速排序法在字符串数组排序中的应用，完整的程序示例如下：

【程序 4-9】

```
public class P4_9 {
    static final int N=5;
    static void quickSort(String[] arr,int left,int right)         //快速排序算法
    {
        String  f,t;
        int rtemp,ltemp;

        ltemp=left;
        rtemp=right;
        f=arr[(left+right)/2];                                      //分界值
        while(ltemp<rtemp)
        {
            while(arr[ltemp].compareTo(f)<0)
            {
                ++ltemp;
            }
            while(arr[rtemp].compareTo(f)>0)
            {
```

```
                --rtemp;
            }
            if(ltemp<=rtemp)
            {
                t=arr[ltemp];
                arr[ltemp]=arr[rtemp];
                    arr[rtemp]=t;
                --rtemp;
                    ++ltemp;
            }
        }
        if(ltemp==rtemp)
        {
            ltemp++;
        }

        if(left<rtemp)
        {
            quickSort(arr,left,ltemp-1);                                    //递归调用
        }
        if(ltemp<right)
        {
            quickSort(arr,rtemp+1,right);                                   //递归调用
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        String[] arr=new String[]{"One","World","Dream","Beijing","Olympic"};   //声明并初始化
        int i;

        System.out.print("排序前：\n");
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            System.out.println(arr[i]);                                      //输出排序前
        }

        quickSort(arr,0,N-1);                                                //排序

        System.out.print("排序后：\n");
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            System.out.println(arr[i]);                                      //输出排序后
        }
    }
}
```

在这段程序中，主方法首先初始化一个字符串指针数组，并输出排序前的内容。然后，调用QuickSort()排序法子方法，接着输出排序后的内容。

程序中使用 String 类型来声明字符串数组，并初始化字符串数组，分别指向 5 个不同字符串。

在对字符串进行排序时，使用 QuickSort()方法，用递归的方式对字符串进行排序。这里，定义两个字符串变量，用来作为临时变量，保存比较的字符串。程序中使用 compareTo()方法比较两个字符串的大小。通过交换字符串，完成字符串顺序的重新排列。

编译执行这段程序，得到如下结果，如图 4-31 所示。

图 4-31　执行结果

当然，也可以采用其他的排序方法对字符串数组进行排序，只需要进行相类似的修改即可。读者可以参照这个例子使用前面所讲的排序法进行排序作为练习。

4.10.3　字符串的排序

前面介绍了几种常用的排序算法，都是针对整型数据排序的。在实际应用中有时需要对字符进行排序。此时，由于字符也可以当作整型数据来看待。这样，仍然可以借鉴前述的排序算法，进行稍加修改即可。

这里举例说明快速排序法在字符排序中的应用，修改的算法示例代码如下：

```
void kuaiSu(char[] a,int left,int right)                //字符快速排序
{
    int f,l,r;
    char t;

    l=left;
    r=right;
    f=a[(left+right)/2];
    while(l<r)
    {
        while(a[l]<f) ++l;
        while(a[r]>f) --r;
        if(l<=r)
        {
            t=a[l];
            a[l]=a[r];
                a[r]=t;
                ++l;
            --r;
        }
    }
    if(l==r)
    l++;
    if(left<r)
    {
        kuaiSu(a,left,l-1);                             //递归调用
    }

    if(l<right)
    {
        kuaiSu(a,r+1,right);                            //递归调用
    }
}
```

在这里，输入参数 a 一般为一个字符数组的首地址，输入参数 left 指向数组最左边的值，输入参数 right 指向数组最右边的值。

有了这个字符的快速排序算法之后。这里通过一个完整的例子说明快速排序法在字符排序中的应用，完整的程序示例如下：

【程序 4-10】

```
import java.util.Scanner;

public class P4_10 {
    static void kuaiSu(char[] a,int left,int right)                    //字符快速排序
    {
        int f,l,r;
        char t;

        l=left;
        r=right;
        f=a[(left+right)/2];
        while(l<r)
        {
            while(a[l]<f) ++l;
            while(a[r]>f) --r;
            if(l<=r)
            {
                t=a[l];
                a[l]=a[r];
                a[r]=t;
                ++l;
                --r;
            }
        }
        if(l==r)
            l++;
        if(left<r)
        {
            kuaiSu(a,left,l-1);                                        //递归调用
        }

        if(l<right)
        {
            kuaiSu(a,r+1,right);                                       //递归调用
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        char[] str=new char[80];
        int N;

        System.out.print("输入一个字符串:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        str=input.next().toCharArray();                                //输入字符串

        N=str.length;
```

```
        System.out.print("排序前：\n");
        System.out.println(str);                        //输出

        kuaiSu(str,0,N-1);                              //排序

        System.out.print("排序后：\n");
        System.out.print(str);                          //输出
    }
}
```

在这段程序中，主函数首先定义一个字符数组，用户输入一个字符串。然后，输出排序前的字符数组内容。然后，调用修改的 kuaisu()排序法的子方法，接着输出排序后的字符数组内容。

执行这段程序，按照提示输入一个字符串，经过排序后，得到如下结果，如图 4-32 所示。

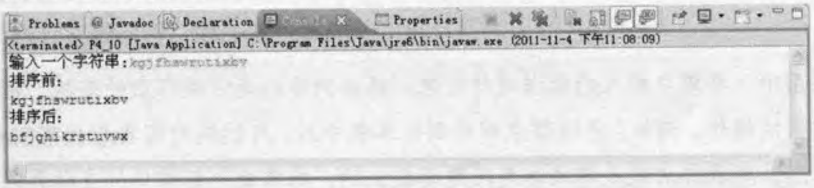


图 4-32　执行结果

当然，也可以采用其他的排序方法对字符串进行排序，只需要进行相类似的修改即可。读者可以参照这个例子来使用前面所讲的排序法进行排序作为练习。

4.11　小　　结

排序算法是各类算法中最基本、最简单的一类算法。本章详细讲解了各种常用的排序算法及其 C 语言源代码。主要包括冒泡排序算法、选择排序算法、插入排序算法、Shell 排序算法、快速排序算法、堆排序算法和合并排序算法。每一种排序算法都各有优缺点，读者可以根据实际问题的需要选择合适的、高效的算法进行排序。排序算法是最基本的，读者应该熟练掌握。

第 5 章 查找算法

在实际应用中，将用户输入的数据进行处理、保存的目的是方便以后的查找、输出等操作，其中查找是最常用的操作。例如，将通信录保存到计算机中后，可能随时需要查找某个人的电话号码、通信地址等信息。查找算法就是解决这类问题而提出的。本章就介绍常用的查找算法及其应用。

5.1 查找算法概述

查找（Search）是指从一批记录中找出满足指定条件的某一记录的过程，查找又称为检索。查找算法广泛应用于各类应用程序中，因此，一个有效的查找算法往往可以大大提供程序的执行效率。

在实际应用中，数据的类型千变万化，每一条数据项往往包含多个数据域。但是，我们在执行查找操作的时候，往往只是指定一个或几个域的值。这些作为查找条件的域称为关键字（Key），关键字分为两类：

- 主关键字（Primary Key）：如果关键字可以唯一标识数据结构中的一个记录，则称此关键字为主关键字；
- 次关键字（Secondary Key）：如果关键字不能唯一区分各不同记录，则称此关键字为次关键字。

我们遇到的大部分查找问题都是以主关键字为准的。而且为了讲解以及读者理解的方便，后面我们将以整型数据为关键字。其他类型的关键字对应的查找算法类似。

如果查找到相应的数据项，往往需要返回该数据项的地址或者位置信息。这样，程序中可以通过位置信息来显示数据项、插入数据项、删除数据项等操作。

如果没有查找到相应的数据项，则可以返回相应的提示信息。

在实际应用中，针对不同的情况往往可以选择不同的查找算法。对于无顺序的数据，只有逐个比较数据，才能找到需要的内容，这称为顺序查找。对于有顺序的数据，也可以采用顺序查找法逐个比较，但还可以采取更快速的方法来找到所需的数据。另外，对于一些特殊的数据结构，例如链表、树结构和图结构等，其都有对应的查找算法。

5.2 顺 序 查 找

顺序查找比较简单，其执行的操作是从数据序列中的第 1 个元素开始，从头到尾依此逐个查找，直到找到所要的数据或搜索完整个数据序列。顺序查找主要针对少量的、无规则的数据。

对于包含 n 个数据的数据序列，使用顺序查找方法查找数据，最理想的情况是目标数据位于数组的第一个，这样比较 1 次就找到目标数据。而最差的情况是需比较完所有的 n 个数据才找到目标数据或者确认没有该数据。平均来说，比较次数为 n/2 次，效率是比较差的。

5.2.1 顺序查找算法

顺序查找算法的程序代码很简单，在 Java 语言中只需编写一个循环，将数组中各元素依次与待查找的目标数进行比较即可。顺序查找算法的示例代码如下：

```
int searchFun(int a[],int n,int x)                    //顺序查找函数
{
    int i,f=-1;
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        if(x==a[i])                                   //查找到
        {
            f=i;
            break;                                    //退出
        }
    }
    return f;
}
```

这里，输入参数 a 为数据序列数组，n 为数组的长度，x 为待查找的数据。

该方法中定义变量 f 的初始为-1。在下面的 for 循环中从头开始，逐个比较数组中的元素，找到相应数据后，则将该元素的序号保存到变量 f 中，并通过 break 语句跳出循环（后面有相同的数也不再查找）。最后，返回变量 f 的值，也就是该数据所在的位置。

5.2.2 顺序查找操作实例

有了前面的顺序查找算法之后，这里我们通过一个完整的例子说明顺序查找的方法在程序中的应用。完整的程序示例如下：

【程序 5-1】

```
import java.util.Scanner;

public class P5_1
{
    static final int N=15;
    static int searchFun(int a[],int n,int x)         //顺序查找函数
    {
        int i,f=-1;
        for(i=0;i<n;i++)
        {
```

```
                if(x==a[i])
                {
                    f=i;
                    break;                                    //退出
                }
            }
            return f;
        }
        public static void main(String[] args)
        {
            int x,n,i;
            int[] shuzu=new int[N];
            for(i=0;i<N;i++)
            {
                shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));;   //产生数组
            }

            System.out.print("顺序查找算法演示！ \n");
            System.out.print("数据序列:\n");
            for(i=0;i<N;i++)
            {
                System.out.print(" "+shuzu[i]);               //输出序列
            }
            System.out.print("\n\n");
            System.out.print("输入要查找的数:");
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            x=input.nextInt();                                //输入要查找的数

            n=searchFun(shuzu,N,x);                           //查找

            if(n<0)                                           //输出查找结果
            {
                System.out.println("没找到数据:"+x);
            }
            else
            {
                System.out.println("数据:"+x+" 位于数组的第"+(n+1)+" 个元素处。");
            }
        }
    }
```

在该程序中，宏义了数组的大小 N=15，main 方法生成 15 个随机数并输出显示这些数据。然后，调用 searchFun()方法进行查找操作。如果在数组中查找到了目标数，将返回该数在数组中的序号；若未查找到目标数，将返回-1。在主调方法中通过 searchFun()方法的返回值进行判断。

执行以上程序，首先将显示一个随机的数据序列，然后输入一个目标数，程序将显示查找的结果，如图 5-1 所示。

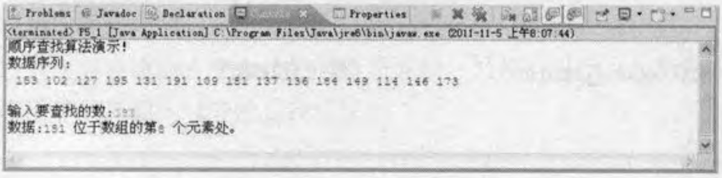


图 5-1　执行结果

5.3 折半查找

在实际应用中，有些数据序列是经过排序的，或者可以经过排序来呈现某种线性结构。这样便不用逐个比较来查找，可以采用折半查找的方法来提高查找的效率。

5.3.1 折半查找算法

折半查找（Binary Search）又称为二分查找，其要求数据序列呈线性结构，也就是经过排序的。对于没有经过排序的，可以通过上一章中的排序算法来进行预排序，然后执行折半查找操作。

折半查找可以明显地提高查找的效率。其算法的操作步骤如下：

首先需要设三个变量 lownum、midnum、highnum，分别保存数组元素的开始、中间和末尾的序号。假定有 10 个元素，开始时令 lownum=0，highnum=9，midnum =(lownum+ highnum)/2=4。接着进行以下判断：

（1）如果序号为 midnum 的数组元素的值与 x 相等，表示查找到了数据，返回该序号 midnum。

（2）如果 x<a[midnum]，表示要查找的数据 x 位于 lownum 与 midnum-1 序号之间，就不需要再去查找 midnum 与 highnum 序号之间的元素了。因此，将 highnum 变量的值改为 midnum-1，重新查找 lownum 与 midnum-1（即 highnum 变量的新值）之间的数据。

（3）如果 x>a[midnum]，表示要查找的数据 x 位于 midnum+1 与 highnum 序号之间，就不需要再去查找 lownum 与 midnum 序号之间的元素了。因此，将 lownum 变量的值改为 midnum-1，重新查找 midnum+1（即 lownum 变量的新值）与 highnum 之间的数据。

（4）逐步循环，如果到 lownum>highnum 时还未找到目标数据 x，则表示数组中无此数据。

从上面的算法执行过程可看出，折半查找是一种递归过程。每折半查找一次，可使查找范围缩小一半，当查找范围缩小到只剩下一个元素，而该元素仍与关键字不相等，则说明查找失败。

在最坏的情况下，折半查找所需的比较次数为 $O(n\log_2 n)$，其查找效率比顺序查找法要快很多。

下面我们通过一个实际的例子来看看折半查找算法的执行步骤。假设有如下经过排序的数据：3、12、31、42、54、59、69、77、90、97。待查找关键字为 42。在折半查找过程如下：

（1）取中间数据项 mid 与待查找关键字 42 对比，mid 项的值大于 42。因此，42 应该在数据的前半部分。

（2）取前半部分的中间数据项 mid 与待查找关键字 42 对比，mid 项的值小于 42。因此，42 应该在数据的后半部分。

（3）取后半部分的中间数据项 mid 与待查找关键字 42 对比，mid 项的值小于 42。因此，42 应该在数据的后半部分。

（4）最后数据仅剩一项，将其作为 mid 与待查找关键字 42 对比，正好相等，表示查找到该数据。

这样，经过 4 次比较便查找到 42 所在的位置。整个查找的步骤，如图 5-2 所示。

如果要查找关键字 67，还是在相同的数据序列中查找，其查找过程如下：

（1）取中间数据项 mid 与待查找关键字 67 对比，mid 项的值小于 67。因此，67 应该在数据的后半部分。

（2）取后半部分的中间数据项 mid 与待查找关键字 67 对比，mid 项的值大于 67。因此，67 应该在数据的前半部分。

（3）取前半部分的中间数据项 mid 与待查找关键字 67 对比，mid 项的值小于 67。因此，67 应该在数据的后半部分。

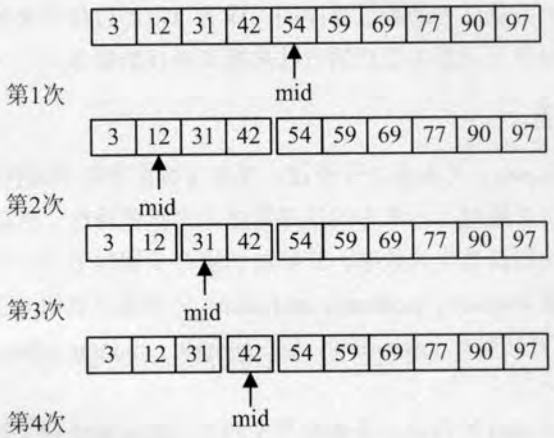


图 5-2　折半查找 42

（4）最后数据仅剩一项，将其作为 mid 与待查找关键字 67 对比，不相等，表示没有查找到该数据。

这样，经过 4 次比较将查找范围缩小到只剩一个元素，仍没有找到指定关键字，说明查找失败。整个查找的步骤，如图 5-3 所示。

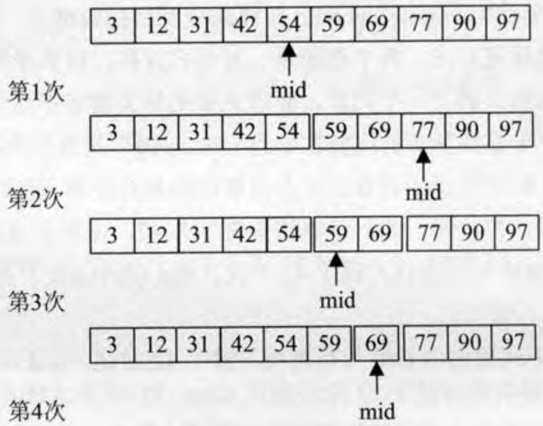


图 5-3　折半查找 42

从上面的过程可看出，折半查找只需要 4 次，而此时采用顺序查找则需要对比完所有的数据才能确定没有该数据。折半查找比顺序查找具有更快的查找效率。

根据以上算法的操作步骤，我们可以编写相应的折半查找算法，程序代码示例如下：

```
int SearchFun(int a[],int n,int x)                    //折半查找
{
    int mid,low,high;
    low=0;
    high=n-1;
```

```
    while(low<=high)
    {
        mid=(low+high)/2;
        if(a[mid]==x)                          //查找到
            return mid;                        //返回
        else if(a[mid]>x)
            high=mid-1;
        else
            low=mid+1;
    }

    return -1;                                 //未查找到
}
```

这里，输入参数 a 为数据序列数组，n 为数组的长度，x 为待查找的数据。在程序中，严格遵循了前面的折半查找算法，读者可以对照两者来加深理解。如果在数组中查找到了目标数，将返回该数在数组中的序号；若未查找到目标数，将返回-1。在主调方法中通过 isearch()方法的返回值进行判断。

5.3.2　折半查找操作实例

有了前面的折半查找算法之后，这里我们通过一个完整的例子说明折半查找的方法在程序中的应用。完整的程序示例如下：

【程序 5-2】

```
import java.util.Scanner;

public class P5_2
{
    static final int N=15;
    static void quickSort(int[] arr,int left,int right)          //快速排序算法
    {
        int f,t;
        int rtemp,ltemp;

        ltemp=left;
        rtemp=right;
        f=arr[(left+right)/2];                                   //确定分界值
        while(ltemp<rtemp)
        {
            while(arr[ltemp]<f)
            {
                ++ltemp;
            }
            while(arr[rtemp]>f)
            {
                --rtemp;
            }
            if(ltemp<=rtemp)
            {
                t=arr[ltemp];
                arr[ltemp]=arr[rtemp];
                arr[rtemp]=t;
```

```
                --rtemp;
                ++ltemp;
            }
        }
        if(ltemp==rtemp)
        {
            ltemp++;
        }

        if(left<rtemp)
        {
            quickSort(arr,left,ltemp-1);                  //递归调用
        }
        if(ltemp<right)
        {
            quickSort(arr,rtemp+1,right);                 //递归调用
        }
    }

    static int searchFun(int a[],int n,int x)             //折半查找
    {
        int mid,low,high;

        low=0;
        high=n-1;
        while(low<=high)
        {
                mid=(low+high)/2;
            if(a[mid]==x)
                return mid;                               //找到
            else if(a[mid]>x)
                high=mid-1;
            else
                low=mid+1;
        }

        return -1;                                        //未找到
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        int[] shuzu=new int[N];
        int x,n,i;

        for(i=0;i<N;i++)
        {
            shuzu[i]=(int)(100+Math.random()*(100+1));;   //产生数组
        }

        System.out.print("折半查找算法演示！\n");
        System.out.print("排序前数据序列:\n");
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            System.out.print(" "+shuzu[i]);               //输出序列
        }
```

```
        System.out.print("\n\n");
        quickSort(shuzu,0,N-1);                          //排序
        System.out.print("排序后数据序列:\n");
        for(i=0;i<N;i++)
        {
            System.out.print(" "+shuzu[i]);              //输出序列
        }

        System.out.print("\n\n");
        System.out.print("输入要查找的数:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        x=input.nextInt();                               //输入要查找的数

        n=searchFun(shuzu,N,x);                          //查找

        if(n<0)                                          //输出查找结果
        {
            System.out.println("没找到数据:"+x);
        }
        else
        {
            System.out.println("数据:"+x+" 位于数组的第"+(n+1)+" 个元素处。");
        }

    }

}
```

在该程序中，宏定义了数组的大小 N=15，main()方法生成 15 个随机数，然后调用 QuickSort()方法进行排序，接着调用 SearchFun()方法进行查找。

编译执行以上程序，程序将显示排序前后的数据序列。然后用户输入待查找的数据，程序便给出查找的结果，如图 5-4 所示。

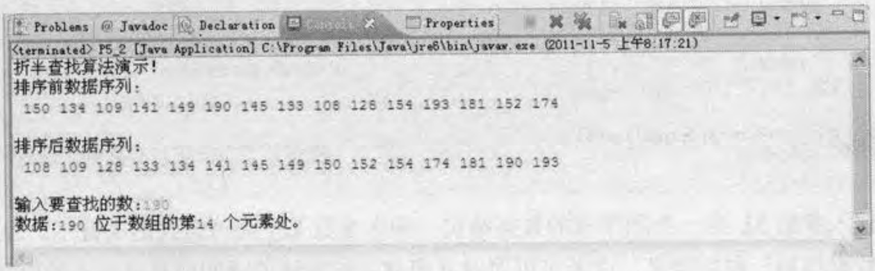


图 5-4　执行结果

5.4　数据结构中的查找算法

前面介绍的顺序查找和折半查找都是最基本的查找算法。在不同的数据结构中，查找算法可以有不同的形式。本节便总结一下不同数据结构中的查找算法。

5.4.1 顺序表结构中的查找算法

顺序表结构是典型的线性表结构，顺序表在存储时才有结构数组的形式。顺序表结构中的查找算法就是查找数据结点，并返回该结点在线性表中的位置。如果在线性表中没有找到值为 x 的结点，则返回一个错误标志。根据值 x 类型的不同，查找结点可以分为按照序号查找结点和按照关键字查找结点两种。

1．按照序号查找结点

对于一个顺序表，序号就是数据元素在数组中的位置，也就是数组的下标标号。按照序号查找结点是顺序表查找结点最常用的方法，这是因为顺序表的存储本身就是一个数组。代码示例如下：

```
Data SLFindByNum(SLType SL,int n)                          //根据序号返回数据元素
{
    if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                              //元素序号不正确
    {
        System.out.print("结点序号错误，不能返回结点！\n");
        return null;                                       //不成功，则返回 0
    }
    return SL.ListData[n];
}
```

这里，输入参数 SL 为一个顺序表的数据结构，输入参数 n 为待查找的序号。SLType 类型采用了前面数据结构一种的定义，读者可以对照着理解。该函数的返回值是指向该结点的指针。

2．按照关键字查找结点

另一个比较常用的是按照关键字查找结点。这里，关键字可以是数据元素结构中的任意一项。这里我们以 key 关键字为例介绍，由前面知道 key 可以看做是学生的学号。代码示例如下：

```
int SLFindByCont(SLType SL,String key)                     //按关键字查询结点
{
    int i;
    for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
        {
            if(SL.ListData[i].key.compareTo(key)==0)       //如果找到所需结点
            {
              return i;                                    //返回结点序号
            }
        }
    return 0;                                              //搜索整个表后仍没有找到，则返回 0
}
```

这里，输入参数 SL 为一个顺序表的数据结构，输入参数 key 为待查找的关键字。SLType 类型采用了前面数据结构一种的定义，读者可以对照着理解。该方法的返回值是该结点的序号。

3．实例

有了前面的顺序表结构中的查找算法，我们便可以轻松地完成顺序表的查找。我们给出一个完整的例子，来演示按照序号查找结点的方法。完整的程序代码示例如下：

【程序 5-3】

```
import java.util.Scanner;

public class P5_3
```

```
{
    public static void main(String[] args)
    {
        int i;
        SLType SL=new SLType();                          //定义顺序表变量
        Data pdata;                                      //定义结点保存指针变量
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.print("顺序表操作演示!\n");

        SL.SLInit(SL);                                   //初始化顺序表

        System.out.print("初始化顺序表完成!\n");

        do
        {                                                //循环添加结点数据
            System.out.print("输入添加的结点(学号 姓名 年龄): ");
            Data data=new Data();
            data.key=input.next();
            data.name=input.next();
            data.age=input.nextInt();
            if(data.age>0)                               //若年龄不为 0
            {
                if(SL.SLAdd(SL,data)==0)                 //若添加结点失败
                {
                    break;                               //退出死循环
                }
            }
            else                                         //若年龄为 0
            {
                break;                                   //退出死循环
            }
        }while(true);
        System.out.print("\n 顺序表中的结点顺序为: \n");
        SL.SLAll(SL);                                    //显示所有结点数据

        System.out.print("\n 要取出结点的序号: ");
        i=input.nextInt();                               //输入结占点序号
        pdata=SL.SLFindByNum(SL,i);                      //按序号查找结点
        if(!pdata.equals(null))                          //若返回的结点指针不为 NULL
        {
            System.out.print("第"+i+"个结点为: <"+pdata.key+" "+pdata.name+" "+pdata.age+">");
        }

    }

}

class Data{
    String key;                                          //结点的关键字
    String name;
    int age;
}                                                        //定义结点类型

class SLType                                             //定义顺序表结构
{   static final int MAXLEN=100;
```

```
    Data[] ListData=new Data[MAXLEN+1];                   //保存顺序表的结构数组
    int ListLen;                                          //顺序表已存结点的数量

    void SLInit(SLType SL)                                //初始化顺序表
    {
        SL.ListLen=0;                                     //初始化为空表
    }

    int SLLength(SLType SL)
    {
        return SL.ListLen;                                //返回顺序表的元素数量
    }

    int SLAdd(SLType SL,Data data)                        //增加元素到顺序表尾部
    {
        if(SL.ListLen==MAXLEN)                            //顺序表已满
        {
            System.out.print("顺序表已满，不能再添加结点了！\n");
            return 0;
        }
        SL.ListData[++SL.ListLen]=data;
        return 1;
    }

    Data SLFindByNum(SLType SL,int n)                     //根据序号返回数据元素
    {
        if(n<1 || n>SL.ListLen+1)                         //元素序号不正确
        {
            System.out.print("结点序号错误，不能返回结点！\n");
            return null;                                  //不成功，则返回 0
        }
        return SL.ListData[n];
    }

    int SLFindByCont(SLType SL,String key)                //按关键字查询结点
    {
        int i;
        for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
        {
                if(SL.ListData[i].key.compareTo(key)==0) //如果找到所需结点
            {
              return i;                                   //返回结点序号
            }
        }
        return 0;                                         //搜索整个表后仍没有找到，则返回 0
    }

    int SLAll(SLType SL)                                  //显示顺序表中的所有结点
    {
        int i;
        for(i=1;i<=SL.ListLen;i++)
        {
            System.out.println("<"+SL.ListData[i].key+" "+SL.ListData[i].name+" "+SL.ListData[i].age+">");
```

```
            }
            return 0;
        }
    }
```

在这里，main()主方法首先初始化顺序表，然后循环添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来显示所有的结点数据，然后按照序号来进行结点的查找。该程序执行结果，如图 5-5 所示。

图 5-5　执行结果

5.4.2　链表结构中的查找算法

链表结构也是一种顺序结构，只不过采用的是链式存储的方式。链表结构中的查找算法有点类似于顺序查找的思想。

1. 链表结构中的查找算法

对于链表结构来说，一般可通过关键字进行查询。查找结点的示例代码如下：

```
CLType CLFindNode(CLType head,String key)            //查找结点
{
    CLType htemp;
    htemp=head;                                      //保存链表头指针
    while(htemp!=null)                               //若结点有效，则进行查找
    {
        if(htemp.nodeData.key.equals(key))           //若结点关键字与传入关键字相同
        {
            return htemp;                            //返回该结点指针
        }
        htemp=htemp.nextNode;                        //处理下一结点
    }
    return null;                                     //返回空指针
}
```

在这里，输入参数 head 为链表头引用，输入参数 key 是用来在链表中进行查找的结点关键字。程序中，首先从链表头引用开始，对结点进行逐个比较，直到查找到。找到关键字相同的结点后，返回该结点的引用，方便调用程序处理。CLType 类型采用了前面数据结构定义的一种，读者可以对照着理解。

2. 实例

有了前面的链表结构中的查找算法，我们便可以轻松地完成链表的查找。我们给出一个完整的例子，来演示按照关键字查找结点的方法。完整的程序代码示例如下：

【程序 5-4】

```
import java.util.Scanner;

class Data1
{
    String key;                                          //关键字
    String name;
    int age;
}

class    CLType                                         //定义链表结构
{
    Data1 nodeData=new Data1();
    CLType nextNode;

    CLType CLAddEnd(CLType head,Data1 nodeData)          //追加结点
    {
        CLType node,htemp;
        node=new CLType();
        node.nodeData=nodeData;                          //保存数据
            node.nextNode=null;                          //设置结点指针为空，即为表尾
            if(head==null)                               //头指针
            {
                head=node;
                return head;
            }
            htemp=head;
            while(htemp.nextNode!=null)                  //查找链表的末尾
            {
                htemp=htemp.nextNode;
            }
            htemp.nextNode=node;
            return head;
    }


    CLType CLFindNode(CLType head,String key)            //查找结点
    {
        CLType htemp;
        htemp=head;                                      //保存链表头指针
        while(htemp!=null)                               //若结点有效，则进行查找
        {
            if(htemp.nodeData.key.equals(key))           //若结点关键字与传入关键字相同
            {
                return htemp;                            //返回该结点指针
            }
            htemp=htemp.nextNode;                        //处理下一结点
        }
        return null;                                     //返回空指针
    }
```

```
    int CLLength(CLType head)                                   //计算链表长度
    {
        CLType htemp;
        int Len=0;
        htemp=head;
        while(htemp!=null)                              //遍历整个链表
        {
            Len++;                                      //累加结点数量
            htemp=htemp.nextNode;                       //处理下一结点
        }
        return Len;                                     //返回结点数量
    }

    void CLAllNode(CLType head)                         //遍历链表
    {
        CLType htemp;
        Data1 nodeData;
        htemp=head;
        System.out.print("当前链表共有"+CLLength(head)+"个结点。链表所有数据如下：\n");
        while(htemp!=null)                              //循环处理链表的每个结点
        {
            nodeData=htemp.nodeData;                    //获取结点数据
            System.out.println("结点("+nodeData.key+" "+nodeData.name+" "+nodeData.age+")");
            htemp=htemp.nextNode;                       //处理下一结点
        }
    }
}

public class P5_4 {
    public static void main(String[] args)
    {
        CLType node, head=null;
        String key;
        Scanner input=new Scanner(System.in);

        System.out.print("链表测试!\n 先输入链表中的数据。\n");
        do
        {
            System.out.print("输入添加的结点(学号 姓名 年龄)：");
            Data1 data=new Data1();
            data.key=input.next();

            if(data.key.equals("0"))
            {
                break;                                  //若输入 0，则退出
            }
            else
            {   CLType t=new CLType();
                data.name=input.next();
                data.age=input.nextInt();
                head=t.CLAddEnd(head,data);             //在链表尾部添加结点
            }
        }while(true);
        head.CLAllNode(head);                           //显示所有结点
```

```
            System.out.print("\n 演示在链表中查找，输入查找关键字:");
            key=input.next();                                  //输入查找关键字
            node=head.CLFindNode(head,key);                    //调用查找函数，返回结点指针
            if(node!=null)                                     //若返回结点指针有效
            {
                Data1 nodeData=node.nodeData;                  //获取结点的数据
             System.out.println(" 关 键 字 "+key+" 对 应 的 结 点 为 :("+nodeData.key+"  "+nodeData.name+"
"+nodeData.age+")");
            }
            else                                               //若结点指针无效
            {
                System.out.print("在链表中未找到关键字为"+key+"的结点！\n");
            }

        }

    }
```

在这里，main()主方法首先初始化链表，然后循环添加数据结点，当输入全部为 0 的时候则退出结点添加的进程。接下来显示所有的结点数据，然后演示了查找结点操作。该程序执行结果，如图 5-6 所示。

图 5-6　执行结果

5.4.3　树结构中的查找算法

树（Tree）结构是一种描述非线性层次关系的数据结构，其中最为重要的便是二叉树。所有我们这里仅讨论二叉树中的查找算法。查找结点就是在遍历二叉树中的每一个结点，逐个比较数据，当找到目标数据时将返回该数据所在结点的指针。查找结点的代码示例如下：

```
CBTType TreeFindNode(CBTType treeNode,String data)          //查找结点
{
    CBTType ptr;

    if(treeNode==null)
    {
        return null;
    }
    else
    {
        if(treeNode.data.equals(data))
```

```
        {
            return treeNode;
        }
        else
        {                                                   //分别向左右子树递归查找
            if((ptr=TreeFindNode(treeNode.left,data))!=null)
            {
                return ptr;
            }
            else if((ptr=TreeFindNode(treeNode.right, data))!=null)
            {
                return ptr;
            }
            else
            {
                return null;
            }
        }
    }
}
```

在这里，输入参数 treeNode 为待查找的二叉树的根结点，输入参数 data 为待查找的结点数据。程序中首先判断根结点是否为空，然后分别向左右子树递归查找。如果当前结点的数据与查找数据相等，则返回当前结点的指针。CBTType 类型采用了前面数据结构定义的一种，读者可以对照着理解。

读者可以参阅前面章节关于二叉树的介绍来编写相应的测试实例，这里就不再赘述了。

5.4.4　图结构中的查找算法

图（Graph）结构也是一种非线性数据结构，每个数据元素之间可以任意关联，这就导致图结构非常复杂。图结构的查找算法，就是查找图中是否包含某个顶点。我们可以通过图结构的遍历算法进行查找。图结构中的查找算法代码示例如下：

```
void DeepTraOne(GraphMatrix GM,int n,char ch)           //从第 n 个结点开始，深度遍历图
{
    int i;
    GM.isTrav[n]=1;                                     //标记该顶点已处理过
If(GM.Vertex[n]==ch)                                    //判断
    {
        System.out.printf("->%c",GM.Vertex[n]);         //输出结点数据
    }

    //添加处理节点的操作
    for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
    {
        if(GM.EdgeWeight[n][i]!=GraphMatrix.MaxValue && GM.isTrav[n]==0)
        {
            DeepTraOne(GM,i,ch);                        //递归进行遍历
         }
    }
}

void FindV(GraphMatrix GM,char ch)                      //深度优先遍历
{
```

```
        int i;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                         //清除各顶点遍历标志
        {
            GM.isTrav[i]=0;
        }
        System.out.printf("深度优先遍历结点:");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            if(GM.isTrav[i]==0)                    //若该点未遍历
            {
                DeepTraOne(GM,i,ch);               //调用函数遍历
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }
```

这里，方法 DeepTraOne()从第 n 个结点开始深度遍历图，在遍历图的过程中逐个对比查找顶点。其输入参数 GM 为一个指向图结构的引用，输入参数 n 为顶点编号，输入参数 ch 为待查找的顶点。程序中通过递归进行遍历查找，查找到之后输出该顶点数据。GraphMatrix 类型采用了前面数据结构定义的一种，读者可以对照着理解。

方法 FindV()用于执行完整的深度优先遍历查找，以访问所有的顶点。其中，输入参数 GM 为一个指向图结构的引用。程序中通过调用方法 DeepTraOne()来完成所有顶点的遍历查找。

读者可以参阅前面章节关于图结构的介绍来编写相应的测试实例，这里就不再赘述了。

5.5 小　　结

查找算法在很多应用程序中都用到，特别是与数据库有关的程序。本章介绍了两种基本的查找算法，顺序查找算法和折半查找算法。然后，介绍了不同数据结构中的查找算法，包括顺序表结构中的查找算法、链表结构中的查找算法、树结构中的查找算法和图结构中的查找算法。读者应该熟练掌握本章内容。

第 6 章 基本数学问题

算法的一个重要应用就是求解数学问题。实际应用中很多场合都会涉及或者最终归结为数学问题，例如日历的推算、科学计算、工程处理等。数学问题涉及的内容非常广泛，往往需要很多的数学知识背景。本章将首先介绍一些常见的基本的数学问题的算法求解，在讲解过程中也会简单讲解相关的数学背景知识。

6.1 判断闰年

闰年（Leap Year）是一个比较简单而又经典的数学问题。那么什么是闰年呢？闰年就是阳历或阴历中有闰日的年，或阴阳历中有闰月的年。其实闰年问题是历法上的一种折中，主要是弥补因人为制定的历法而造成的年度天数与地球实际公转周期的时间差而设置的。也就是说，补上时间差的年份称为闰年。

那么数学上闰年有什么计算规则呢？闰年的一个基本规则就是“四年一闰，百年不闰，四百年再闰”。通俗来讲，闰年就是能够被 4 整除，但同时不能够被 100 整除却能够被 400 整除的年份。我们根据闰年的数学描述便可以编写程序来判断给定的年份是否为闰年。

这里，给出一个判断闰年的算法，代码示例如下：

```
int LeapYear(int year)                              //判断闰年
{
    if((year%400==0) || (year%100!=0) && (year%4==0))
    {
        return 1;                                   //是闰年,则返回 1
    }
    else
    {
        return 0;                                   //不是闰年,则返回 0
    }
}
```

程序中使用 LeapYear 这个方法来判断闰年，输入参数为年份 year，如果该年份是闰年则返回值为 1，否则返回值为 0。在该方法中，采用 if 判断语句来对年份 year 来进行判断，条件就是前面介绍的。

下面我们来看看在具体程序中如何使用该算法来判断闰年。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-1】

```
public class P6_1 {

    static int LeapYear(int year)                          //判断闰年
    {
        if((year%400==0) || (year%100!=0) && (year%4==0))
        {
            return 1;                                      //是闰年,则返回 1
        }
        else
        {
            return 0;                                      //不是闰年,则返回 0
        }
    }


    public static void main(String[] args)
    {
        int year;
        int count=0;

        System.out.print("2000 年到 3000 年之间所有的闰年如下：\n");
        for(year=2000;year<=3000;year++)
        {
            if(LeapYear(year)==1)
            {
                System.out.print(year+" ");                //输出闰年年份
                count++;
                if(count%16==0)
                    System.out.print("\n");
            }
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在该程序中，main 主方法通过 for 循环来逐个对 2000 年到 3000 年之间的年份进行判断，最终输出所有的闰年。执行该程序得到如下结果，如图 6-1 所示。

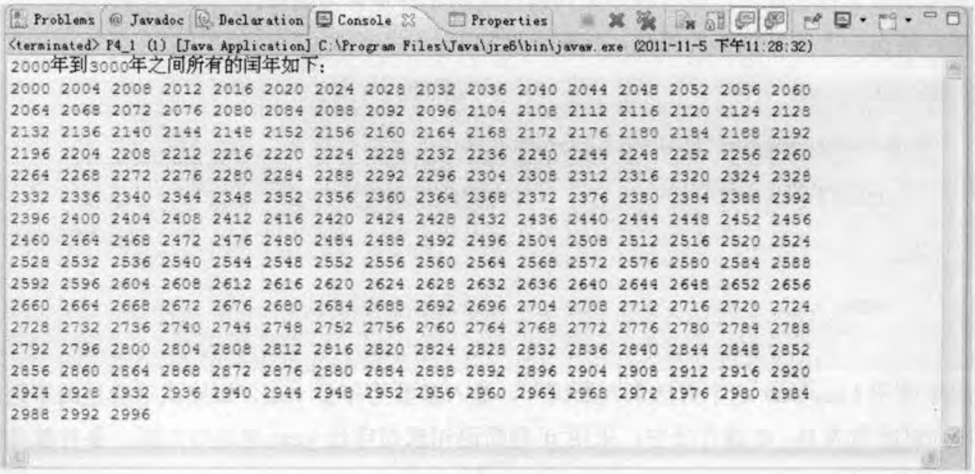


图 6-1　执行结果

6.2 多项式计算

多项式（Polynomial）是基础数学中常用到的概念，多项式就是若干个单项式的和构成的式子。这里首先简单明确几个基本的概念。多项式中每个单项式称为多项式的项，多项式项的最高次数称为多项式的次数，不含字母的项称为常数项。

6.2.1 一维多项式求值

对于一维多项式就是包含一个变量的多项式，一个普遍的一维多项式示例如下：

$$P(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

一维多项式求值就是对于上述多项式，计算在指定的 x 处的函数值。例如：

$$P(x)=3x^6+7x^5-3x^4+2x^3+7x^2-7x-15$$

计算该多项式在指定 x 时，P(x)的函数值。这个问题其实比较简单，我们可以采用如下的程序代码来实现：

```
double x=2.0;
double P;
P=3*x*x*x*x*x*x+7*x*x*x*x*x-3*x*x*x*x+2*x*x*x+7*x*x-7*x-15;
System.out.printf("P(%f)=%f",x,P);
```

但是，如何重新换一个多项式呢？那么我们就要重新改写代码，重列一个多项式表达式来进行计算。这样显然是比较麻烦的。有没有一个通用的算法来计算多项式的值呢？答案是肯定的，因为这就是研究算法的目的所在，即寻找有效的、通用的求解问题的方法。

一个通用的计算多项式的值的算法可以采用递推的方式。首先将上述多项式可以变形为如下的等价形式：

$$P(x)=(\cdots((a_{n-1}x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\cdots+a_1)x+a_0$$

通过这个表达式可以看出，只要从里往外一层一层地按照如下的方式递推，便可以计算得到整个一维多项式的值。

$$R_{n-1}=a_{n-1}$$

$$R_k=R_{k+1}x+a_k, \qquad k=n-2,\cdots,1,0$$

通过一层一层计算后，得到的 R_0 便是多项式 P(x)的值。

我们依照这个思路来编写一维多项式求值的算法，代码示例如下：

```
double polynomial1D(double a[],int n,double x)
{
    int i;
    double result;
    result=a[n-1];
    for (i=n-2; i>=0; i--)                  //递推算法计算
      {
          result=result*x+a[i];
      }
    return result;                           //返回计算结果
}
```

其中，输入参数 n 为多项式的项数，数组 a[]依次存放多项式的 n 个系数，x 便是指定的变量值。

该方法的返回值便是多项式在指定的 x 点的值。

下面，我们按照这个算法来计算如下多项式在 x=-2.0、-0.5、1.0、2.0、3.7 和 4.0 处的值。

$$P(x)=3x^6+7x^5-3x^4+2x^3+7x^2-7x-15$$

完整的程序代码示例如下：

【程序 6-2】

```
import java.text.DecimalFormat;
public class P6_2 {
        static double polynomial1D(double a[],int n,double x)
        {
            int i;
            double result;
            result=a[n-1];
            for (i=n-2; i>=0; i--)                              //递推算法计算
             {
                   result=result*x+a[i];
             }
            return result;                                      //返回计算结果
        }
        public static void main(String[] args)
        {
            int i;
            double a[]={-15.0,-7.0,7.0,2.0,-3.0,7.0,3.0};
            double[] x={-2.0,-0.5,1.0,2.0,3.7,4.0};
            double result;

            DecimalFormat df = new DecimalFormat("0.0000000E000");
            DecimalFormat df1 = new DecimalFormat("0.00");

            System.out.print("\n");
            for (i=0; i<6; i++)                                 //逐个计算结果
             {
                   result=polynomial1D(a,7,x[i]);
                   System.out.print("x="+df1.format(x[i])+"时，p(x)="+df.format(result)+"\n");
             }
            System.out.print("\n");
        }
}
```

在这里，主方法首先给出了多项式的系数以及要求值的 x 位置，然后循环调用 polynomial1D() 方法来计算指定点的多项式的值，并打印输出该值。程序执行结果如下：

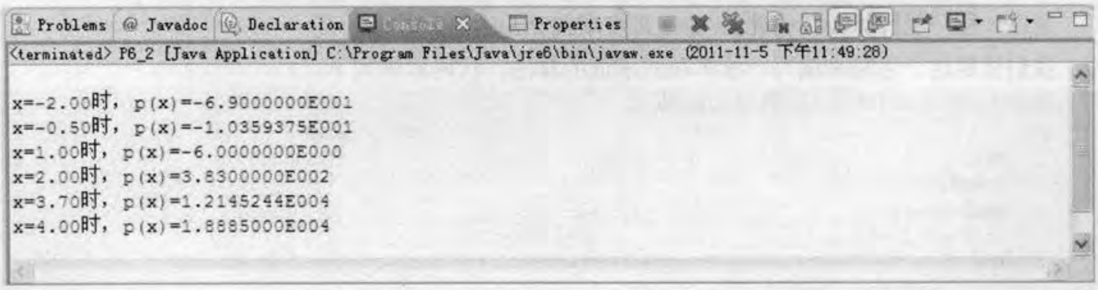


图 6-2　执行结果

从这个例子可以看出，只要我们换一个思路便可以编写一个通用的算法，来适应这一类类似问题的求解。在后面，我们也采用同样的方法来编写通用的计算算法，而非简单单个问题的计算。

6.2.2　二维多项式求值

对于二维多项式，也就是包含 x、y 两个变量的多项式，共一般形式如下：

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}x^i y^j$$

二维多项式求值即计算在指定的（x，y）处的函数值。我们可以采用相同的方法将二维多项式变形，然后利用递推的方式计算二维多项式的值。首先，上述二维多项式等价于如下形式：

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}x^i y^j=\sum_{i=0}^{m-1}[\sum_{j=0}^{n-1}(a_{ij}x^i)y^j]$$

进一步，我们可以将上述式子中“[]”内看做一维多项式，则有如下的式子：

$$t_i=\sum_{j=0}^{n-1}(a_{ij}x^i)y^j,i=0,1,\cdots,m-1$$

参照上一节我们便可以得到计算 t_i 的递推表达式：

$$R_{n-1}=a_{i,n-1}x^j$$

$$R_j=R_{j+1}y+a_{ij}x^j,j=n-2,\ \cdots,\ 1,\ 0$$

递推到最后的 R_0 也就是 t_i。最后，我们只需将所有的 t_i 累加在一起便可以了。按照这种思路，可以编写如下的二维多项式求值的算法，代码示例如下：

```
double polynomial2D(double a[][],int m,int n,double x,double y)
{
    int i,j;
    double result,temp,tt;
    result=0.0;
    tt=1.0;
    for(i=0;i<m;i++)                                    //递推求值
    {
    temp=a[i][n-1]*tt;
        for(j=n-2;j>=0;j--)                             //内层的递推算法
        {
            temp=temp*y+a[i][j]*tt;
        }
        result+=temp;
        tt*=x;
    }
    return result;                                      //返回结果
}
```

在这里，输入参数 m 和 n 分别为二多项式自变量 x 和 y 的项数，数组 a 为二维多项式的系数，x 和 y 为指定的求值点。该方法的返回值便是指定的（x，y）处的多项式的值。

下面我们举例来说明二维多项式求值的应用。对于一个 4×5 的二维多项式 $P(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{4}a_{ij}x^i y^j$，其中的系数可以用二维数组来表示，示例如下：

对于这样一个二维多项式，计算在给定的（0.5，-2.0）处的多项式的值。采用上面的算法来实现，完整的程序代码示例如下：

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 & 5.0 \\ 6.0 & 7.0 & 8.0 & 9.0 & 10.0 \\ 11.0 & 12.0 & 13.0 & 14.0 & 15.0 \\ 16.0 & 17.0 & 18.0 & 19.0 & 20.0 \end{bmatrix}$$

【程序 6-3】

```
import java.text.DecimalFormat;

public class P6_3 {
    static double polynomial2D(double a[][],int m,int n,double x,double y)
    {
        int i,j;
        double result,temp,tt;
        result=0.0;
        tt=1.0;
        for(i=0;i<m;i++)                                    //递推求值
        {
            temp=a[i][n-1]*tt;
            for(j=n-2;j>=0;j--)                             //内层的递推算法
            {
                temp=temp*y+a[i][j]*tt;
            }
            result+=temp;
            tt*=x;
        }
        return result;                                      //返回结果
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        double result;
        double x,y;
        DecimalFormat df = new DecimalFormat("0.000E000");
        double a[][]={{1.0,2.0,3.0,4.0,5.0},                //初始化二维多项式的系数
                      {6.0,7.0,8.0,9.0,10.0},
                      {11.0,12.0,13.0,14.0,15.0},
                      {16.0,17.0,18.0,19.0,20.0}};
        x=0.5;                                              //待求值的点
        y=-2.0;
        System.out.print("二维多项式求值：\n");

        result=polynomial2D(a,4,5,x,y);                     //调用方法计算

        System.out.print("p("+x+","+y+")="+df.format(result)+"\n");
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，主方法首先给出了二维多项式的系数，采用二维数组来表示，以及要求值的（x，y）位置，然后调用 polynomial2D 方法来计算指定点的多项式的值，并打印输出该值。程序执行结果如下：

图 6-3　执行结果

6.2.3　多项式乘法

多项式乘法就是将两个多项式进行相乘，最后得到一个新的多项式。例如，如下的两个多项式：

$$A(x)=a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$B(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$$

这两个多项式的项数分别为 m 和 n，最高次数分别为 m-1 和 n-1。这两个多项式相乘的结果如下：

$$R(x)=A(x)B(x)=rn+m-2xn+m-2+\cdots+r1x+r0$$

乘积多项式的最高次数为 m+n-2。其中，每一项的系统可以按照如下的方法来计算：

$$r k=0, \text{其中 } k=0,1,\cdots,m+n-2$$

$$r i+j=ri+j+a i b j, \text{其中 } i=0,1,\cdots,m-1;j=0,1,\cdots,n-1$$

我们依照这个方法便可以编写相应的多项式乘法的算法，代码示例如下：

```
polynomial_mul(double A[],int m,double B[],int n,double R[],int k)
{
    int i,j;
    for (i=0; i<k; i++)                          //初始化
    {
        R[i]=0.0;
    }
    for (i=0; i<m; i++)                          //计算各项系数
    {
        for (j=0; j<n; j++)
        {
            R[i+j]+=A[i]*B[j];
        }
    }
}
```

其中，输入参数 A[]和 m 分别为多项式 A(x)的系数矩阵和项数，输入参数 B[]和 n 分别为多项式 B(x)的系数矩阵和项数，参数 R[]和 k 分别为乘积多项式 R(x)的系数矩阵和项数。

例如，我们要计算如下两个多项式的乘积多项式：

$$A(x)=2x^5+3x^4-x^3+2x^2+5x-4$$

$$B(x)=3x^3+x^2-2x-3$$

通过这两个表达式，我们知道 m=6，n=4，最后的乘积多项式 k=m+n-1=9。这样便可以使用上述算法来进行计算，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-4】

```
import java.text.DecimalFormat;
public class P6_4 {
    static void polynomial_mul(double A[],int m,double B[],int n,double R[],int k)
    {
        int i,j;
        for (i=0; i<k; i++)                      //初始化
        {
            R[i]=0.0;
        }
        for (i=0; i<m; i++)                      //计算各项系数
        {
            for (j=0; j<n; j++)
            {
                R[i+j]+=A[i]*B[j];
```

```
                }
            }
        }
        public static void main(String[] args)
        {
            int i;
            double A[]={-4.0,5.0,2.0,-1.0,3.0,2.0};
            double B[]={-3.0,-2.0,1.0,3.0};
            double[] R=new double[9];
            DecimalFormat df = new DecimalFormat("0.0000000E000");

            polynomial_mul(A,6,B,4,R,9);                //调用方法来计算

            System.out.print("多项式 A(x)和 B(x)乘积的各项系数如下：\n");
            for (i=0; i<9; i++)
            {
                System.out.print(" R("+i+")="+df.format(R[i])+"\n");      //输出各项系数
            }
            System.out.print("\n");
        }
}
```

在这里，主方法首先给出了两个多项式的系数，分别采用一维数组来表示，然后调用polynomial_mul()方法来计算乘积多项式的各个系数值，并打印输出该值。程序执行结果如下：

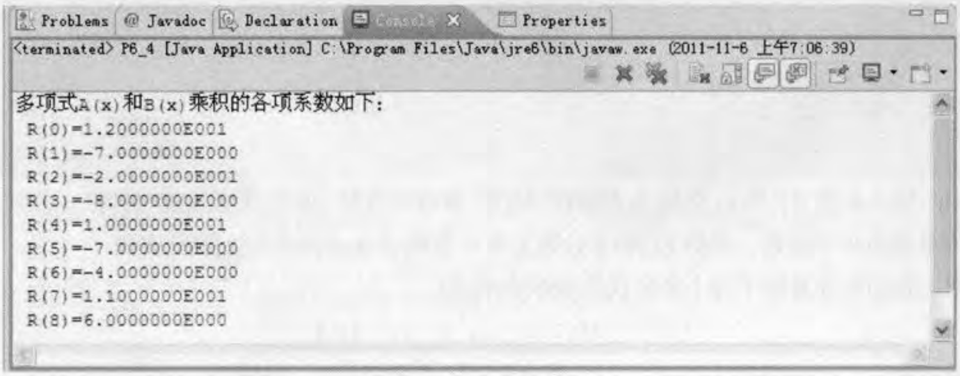


图 6-4　执行结果

通过这里的结果，我们便可以知道，最终的乘积多项式如下：

$$R(x)=6x^8+11x^7-4x^6-7x^5+10x^4-8x^3-20x^2-7x+12$$

6.2.4　多项式除法

多项式除法就是将两个多项式进行相除，最后得到一个商多项式和余多项式。例如，如下的两个多项式：

$$A(x)=a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$B(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$$

这两个多项式的项数分别为 m 和 n，m>n，最高次数分别为 m-1 和 n-1。多项式相除 A(x)/B(x)的商多项式为 R(x)，余多项式为 L(x)。

通过推算，我们可以知道商多项式为 R(x)的最高次数为 k=m-n，余多项式的最高次数为 n-2。

在数学上可以通过综合除法来计算商多项式 R(x)和余多项式为 L(x)中的各个系数。商多项式 R(x)的各个系数由下列递推算法来计算得到：

$$r_{k-i}=a_{m-1-i}/b_{n-1}$$

$$b_j=b_j-s_{k-i}b_{j+i-k}$$

其中，j=m-i-1，…，k-i，i=0，1，…，k。而余多项式为 L(x)中的各个系数 L_0，L_1，…，L_{n-2}，则分别上面递推最后得 b_0，b_1，…，b_{n-2}。

我们依照这个方法便可以编写相应的多项式除法的算法，代码示例如下：

```
void polynomial_div(double A[],int m,double B[],int n,double R[],int k,double L[],int l)
{
    int i,j,mm,ll;
    for (i=0; i<k; i++)                          //初值
    {
        R[i]=0.0;
    }
    ll=m-1;
    for (i=k; i>0; i--)
    {
        R[i-1]=A[ll]/B[n-1];                     //除法，计算商多项式系数
        mm=ll;
        for (j=1; j<=n-1; j++)
        {
            A[mm-1]-=R[i-1]*B[n-j-1];
            mm-=1;
        }
        ll-=1;
    }
    for (i=0; i<l; i++)                          //余多项式系数
    {
        L[i]=A[i];
    }
}
```

在这里，输入参数 A[]和 m 为被除多项式的系数数组和项数，输入参数 B[]和 n 为除数多项式的系数数组和项数，参数 R[]和 k 为商多项式的系数数组和项数，参数 L[]和 l 为余多项式的系数数组和项数。

例如，我们计算 A(x)/B(x)的商多项式和余多项式，A(x)和 B(x)分别如下：

$$A(x)=2x^4+4x^3-3x^2+6x-3$$

$$B(x)=x^2+x-1$$

通过推算可以知道，多项式 A(x)的项数 m=5，多项式 B(x)的项数 n=3，商多项式 R(x)的项数 k=m-n+1=3，余多项式 L(x)的项数 l=n-1=2。

按照上面的算法便可以进行多项式除法的计算，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-5】

```
import java.text.DecimalFormat;

public class P6_5 {
    static void polynomial_div(double A[],int m,double B[],int n,double R[],int k,double L[],int l)
    {
        int i,j,mm,ll;
        for (i=0; i<k; i++)                      //初值
        {
            R[i]=0.0;
        }
```

```
        ll=m-1;
        for (i=k; i>0; i--)
        {
            R[i-1]=A[ll]/B[n-1];                //除法，计算商多项式系数
            mm=ll;
            for (j=1; j<=n-1; j++)
            {
                A[mm-1]-=R[i-1]*B[n-j-1];
                mm-=1;
            }
            ll-=1;
        }
        for (i=0; i<l; i++)                          //余多项式系数
        {
             L[i]=A[i];
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int i;
        double A[]={-3.0,6.0,-3.0,4.0,2.0};
        double B[]={-1.0,+1.0,1.0};
        double[] R=new double[3];
        double[] L=new double[2];
        DecimalFormat df=new DecimalFormat("0.00E000");
        System.out.print("计算 A(x)/B(x)的商多项式和余多项式：\n");

        polynomial_div(A,5,B,3,R,3,L,2);             //调用方法计算

        for (i=0; i<=2; i++)                         //输出商多项式系数
        {
              System.out.print("商多项式系数 R("+i+")="+df.format(R[i])+"\n");
        }
        System.out.print("\n");
        for (i=0; i<=1; i++)                         //输出余多项式系数
        {
              System.out.print("余多项式系数 L("+i+")="+df.format(L[i])+"\n");
        }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在这里，主方法首先给出了两个多项式的系数，分别采用一维数组来表示，然后调用 polynomial_div() 方法来计算商多项式和余多项式的各个系数值，并打印输出该值。程序执行结果如下：

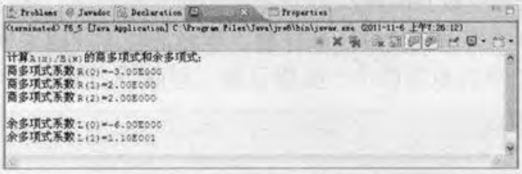


图 6-5　执行结果

通过这里的结果，我们便可以知道，最终的商多项式和余多项式分别如下：

$$R(x)=2x^2+2x-3$$

$$L(x)=11x-6$$

6.3　随机数生成算法

随机数在很多场合都有用处，最典型的就是我们在互联网上登录论坛、网上银行等站点，或者进行注册时，网页会随机给出一个字符和数字组成的序列，这就是验证码。此外，随机数在加密/解密算法、蒙特卡罗分析等场合也有着重要用途。

6.3.1　Java 语言中的随机方法

提到随机数，如果读者熟悉编程语言的话，肯定会说编程语言都提供了随机数生成方法。例如，Java 语言中就提供了如下三种随机数生成方法：

- Math.random()方法，产生的随机数是 0～1 之间的一个 double，我们可以把它乘以一定的数，比如说乘以 100，它就是个 100 以内的随机。
- java.util 包里面提供的 Random 的类，我们可以新建一个 Random 的对象来产生随机数，它可以产生随机整数、随机 float、随机 double、随机 long。
- System 类中有一个 currentTimeMillis()方法，这个方法返回一个从 1970 年 1 月 1 日 0 点 0 分 0 秒到目前的一个毫秒数，返回类型是 long，我们可以拿它作为一个随机数，我们可以拿它对一些数取模，就可以把它限制在一个范围之内。

根据需要选择，便可以产生需要的随机数。一个典型的随机数产生的程序示例如下：

【程序 6-6】

```
import java.util.Random;
public class P6_6 {

    public static void main(String[] args)
    {
        int i,j;                                    //声明变量

        Random r=new java.util.Random(10);          //随机种子
        for(j=0;j<10;j++)
        {
            for(i=0;i<10;i++)
            {
                System.out.printf("%11d    ",r.nextInt());      //输出随机数

            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
}
```

在该程序中，首先定义并初始化变量，然后调用 Random()方法初始化随机种子。这里的随机种子指定为 10，每次执行程序时，该方法将返回相同的值。接着，在循环中调用 nextInt()方法获得伪随机整数，每行 10 个共 10 行。程序执行的结果，如图 6-6 所示。

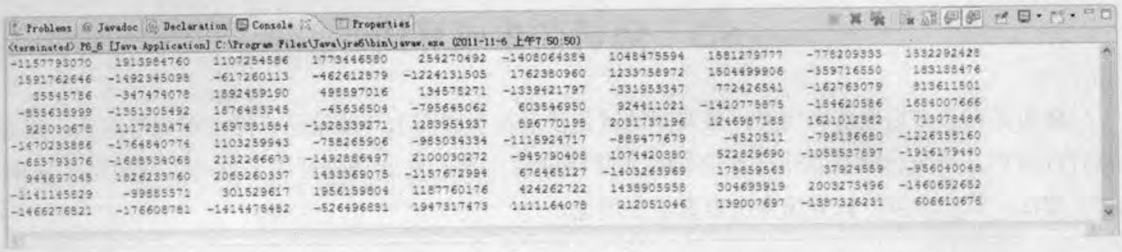


图 6-6　执行结果

当然，我们也可以采用一定的技巧产生任意范围之间随机数。程序代码示例如下：

【程序 6-7】

```
import java.util.Random;

public class P6_7 {

    public static void main(String[] args)
    {
        int i,j;                                        //声明变量

        Random r=new Random();                          //随机种子
        for(j=0;j<10;j++)
        {
            for(i=0;i<10;i++)
            {
                System.out.printf("%3d    ",r.nextInt(100));   //输出 0~100 之间的随机整数
            }
            System.out.print("\n");
        }

    }

}
```

在该程序中，首先定义并初始化变量，然后调用 Random()方法初始化随机种子。这里的随机种子由时间来获得，每次执行程序时，该方法将返回不同的值。接着，在循环中调用 nextInt()方法获得伪随机整数，每行 10 个共 10 行。这里通过传递参数 100，将输出的结果限制在 0~100 之间。程序执行的结果，如图 6-7 所示。

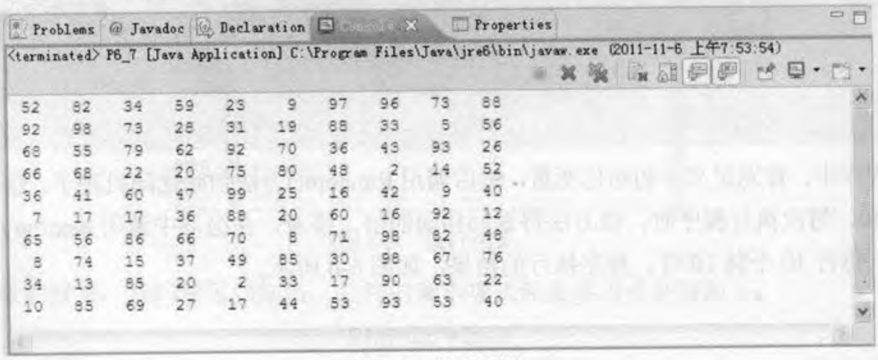


图 6-7　执行结果

此外，也可以使用这两个方法来产生随机的字符输出等。

虽然编程语言给出了一个很方便的随机数生成方法，但是有的时候我们需要自己来编写随机数产生的算法。我们下面要讨论的便是如何实现随机数的生成算法。

6.3.2　[0，1]之间均匀分布的随机数算法

产生随机数的算法有很多种，读者遵循一定的方法可以自己进行发挥。这里给出一个比较简单的产生[0，1]之间均匀分布的随机数的算法。

首先，设定一个基数 base=256.0，以及两个常数 a=17.0 和 b=139.0。这里，基数 base 一般取 2 的整数倍，常数 a 和 b 可以根据经验来随意取。然后，可以按照如下的递推算法来逐个得到[0，1]之间的随机数。

$$r_i=\text{mod}(a*r_{i-1}+b, \text{base})$$

$$p_i=r_i/\text{base}$$

其中，i=1，2，…。而 p_i 便是递推得到的第 i 个随机数。

这里我们需要格外注意如下两点：

- 首先，这里的取模运算是针对浮点数的，而 C 语言中的取模运算符不能应用于浮点型数据的操作。这样，我们就需要自己来编写取模的程序。
- 其次，r_i 是随着递推而每次更新的。因此，我们如果将这个算法编写成方法，则必须考虑是参数是传值还是传地址的问题。

这里，根据上述算法来编写相应的随机数生成方法，代码示例如下：

```
double rand01(double[] r)
{
    double base,u,v,p,temp1,temp2,temp3;
    base=256.0;                          //基数
     u=17.0;
     v=139.0;

     temp1=u*(r[0])+v;                   //计算总值
     temp2=(int)(temp1/base);            //计算商
     temp3=temp1-temp2*base;             //计算余数
     r[0]=temp3;                         //更新随机种子，为下一次使用
     p=r[0]/base;                        //随机数

    return p;
}
```

这里，输入参数为浮点型引用变量 r，r 在初始时可以作为随机种子。在每次调用该方法时，该地址所对应的值将被改变，以作为下一次的计算使用。该方法的返回值便是要求的随机数。

下面，我们来看看如何在程序中使用该算法来产生指定个数的随机数。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-8】

```
public class P6_8 {
    static double rand01(double[] r)
    {
        double base,u,v,p,temp1,temp2,temp3;
        base=256.0;                          //基数
         u=17.0;
```

```
            v=139.0;

            temp1=u*(r[0])+v;                       //计算总值
            temp2=(int)(temp1/base);                //计算商
            temp3=temp1-temp2*base;                 //计算余数
            r[0]=temp3;                             //更新随机种子，为下一次使用
            p=r[0]/base;                            //随机数

            return p;
        }

        public static void main(String[] args)
        {
            int i;
            double[] r={5.0};

            System.out.printf("产生 10 个[0，1]之间的随机数：\n");
            for (i=0; i<10; i++)                    //循环调用
            {
                System.out.printf("%10.5f\n",rand01(r));
            }
            System.out.printf("\n");

        }
}
```

在该程序中，首先初始化随机种子 r=5.0，然后循环调用 Rand01()方法来输出随机数。其中，是将变量 r 的地址传入 Rand01()方法中，以便能够每次调用之后更新随机种子的值，否则将得到完全一样的数据而没有了随机性。该程序执行的结果，如图 6-8 所示。

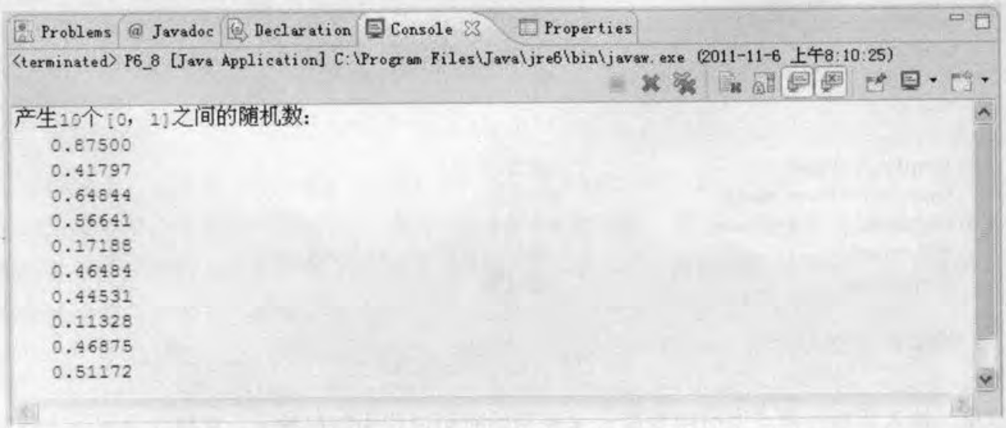


图 6-8　执行结果

6.3.3 产生任意范围的随机数

上面这个算法是最基本的算法，读者也可以采用这个算法并通过一点技巧便可以生成任意范围之间的随机数。例如，我们需要一个[m，n]之间浮点随机数，则可以采用如下的方法获得：

m+(n-m)*rand01(r)

这里给出完整的程序代码，示例如下：

【程序 6-9】

```
public class P6_9 {
      static double rand01(double[] r)
      {
         double base,u,v,p,temp1,temp2,temp3;
         base=256.0;                                  //基数
          u=17.0;
          v=139.0;

          temp1=u*(r[0])+v;                           //计算总值
          temp2=(int)(temp1/base);                    //计算商
          temp3=temp1-temp2*base;                     //计算余数
          r[0]=temp3;                                 //更新随机种子，为下一次使用
          p=r[0]/base;                                //随机数

         return p;
      }

      public static void main(String[] args)
      {
          int i;
         double m,n;
         double[] r={5.0};
          m=10.0;
          n=20.0;

         System.out.print("产生 10 个[10.0,20.0]之间的浮点随机数：\n");
         for (i=0; i<10; i++)                        //循环调用
          {
            System.out.printf("%10.5f\n",m+(n-m)*rand01(r));
          }
         System.out.printf("\n");

      }
}
```

这个程序的基本结构和上面一个程序类似，只不过这里通过表达式 m+(n-m)*rand01(r)，将输出结果限制在[m，n]之间。该程序运行结果，如图 6-9 所示。

图 6-9 执行结果

6.3.4 [m，n]之间均匀分布的随机整数算法

有了上面的[0，1]之间均匀分布的随机数算法，如果需要得到随机的整数，那也是比较容易的。我们只需将结果取整便可以。例如，如果需要得到[m，n]之间均匀分布的随机整数算法。这里，m 和 n 都是整数，可以采用如下的式子得到：

m+(int)((n-m)*rand01(r))

这里给出完整的程序代码，示例如下：

【程序 6-10】

```
public class P6_10 {
    static double rand01(double[] r)
    {
        double base,u,v,p,temp1,temp2,temp3;
        base=256.0;                          //基数
         u=17.0;
         v=139.0;

         temp1=u*(r[0])+v;                   //计算总值
         temp2=(int)(temp1/base);            //计算商
         temp3=temp1-temp2*base;             //计算余数
         r[0]=temp3;                         //更新随机种子，为下一次使用
         p=r[0]/base;                        //随机数

        return p;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
         int i,m,n;
        double[] r={5.0};
         m=100;
         n=200;

        System.out.print("产生 10 个[100,200]之间的随机整数：\n");
        for (i=0; i<10; i++)                 //循环调用
         {
            System.out.printf(" %d\n",m+(int)((n-m)*rand01(r)));
         }
        System.out.print("\n");
    }
}
```

在该程序中，通过表达式 m+(int)((n-m)*rand01(r))，产生了 10 个[100，200]之间的随机整数。该程序运行的结果，如图 6-10 所示。

图 6-10　执行结果

6.3.5 正态分布的随机数生成算法

前面介绍的都是均匀分布的随机数生成算法，在科学及工程应用中，正态分布的随机数也是经常用到的。对于一个给定的正态分布，描述该正态分布的参数包括均值 μ 和方差 σ^2。在数学上，一种近似的产生正态分布的算法如下：

$$RZT = \mu + \sigma \frac{(\sum_{i=0}^{n-1} R_i) - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

这里，R_i 为[0，1]之间的均匀分布的随机数。当 n 趋向于无穷大的时候，得到的随机分布为正态分布。关于这个算法更为详细的数学讨论，读者可以参阅概率统计相关的书籍，这里我们将直接引用。

在实际应用中，我们不可能取 n 为无穷大。一般来说，n 只有足够大就可以了。为了计算的方便，我们可以取 n=12，这样上式分母中的根号便可以忽略，而且得到的结果也已经足够解决正态分布了。

按照上面的算法，可以编写正态分布的随机数生成算法，代码示例如下：

```
double randZT(double u,double t, double[] r)          //正态分布的随机数
    {
        int i;
        double total=0.0;
        double result;
        for(i=0;i<12;i++)
        {
            total+=rand01(r);                          //累加
        }
        result=u+t*(total-6.0);                        //随机数
        return result;
    }
```

这里，输入参数 u 也就是正态分布的均值 μ，输入参数 t 也就是正态分布的方差 σ，输入参数 r 为随机种子。在该程序中，使用到了前面的[0，1]之间均匀分布的随机数算法 Rand01()。

下面结合一个完整的实例来看一下如何产生需要的正态分布随机数。这里假设需要的正态分布均值 μ=2.0，方差 $\sigma^2=3.5^2$。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-11】

```
public class P6_11 {
    static double rand01(double[] r)
    {
        double base,u,v,p,temp1,temp2,temp3;
        base=256.0;                                  //基数
        u=17.0;
        v=139.0;

        temp1=u*(r[0])+v;                            //计算总值
        temp2=(int)(temp1/base);                     //计算商
        temp3=temp1-temp2*base;                      //计算余数
        r[0]=temp3;                                  //更新随机种子，为下一次使用
        p=r[0]/base;                                 //随机数
```

```
        return p;
    }
    static double randZT(double u,double t, double[] r)        //正态分布的随机数
    {
        int i;
        double total=0.0;
        double result;
        for(i=0;i<12;i++)
        {
            total+=rand01(r);                                   //累加
        }
        result=u+t*(total-6.0);                                 //随机数
        return result;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int i;
        double u,t;
        double[] r={5.0};
        u=2.0;
        t=3.5;

        System.out.print("产生 10 个正态分布的随机数：\n");
        for (i=0; i<10; i++)                                    //循环调用
        {
            System.out.printf("%10.5f\n",randZT(u,t,r));
        }
        System.out.print("\n");

    }
}
```

该程序中，主方法首先初始化正态分布的均值 μ 和方差 σ，然后循环调用 randZT（）方法来输出该正态分布的随机数。该程序运行结果，如图 6-11 所示。

图 6-11　执行结果

当然，我们也可以通过取整的限制，来得到任意正态分布的随机整数的生成。这里就不再赘述了，读者可以参阅前面的介绍来自己给出相应的程序。

6.4　复 数 运 算

复数运算在科学及工程计算领域都有着极为重要的地位，因为很多问题不采用复数将很难描述或计算。在 Java 语言中，没有对复数支持，这里将介绍如何借助简单的数学知识和基本的 Java 语法，来自己完成复数算法。

6.4.1　简单的复数运算

谈到运算，最简单的莫过于加法（+）、减法（-）、乘法（*）和除法（/）。下面将分别探讨这四种运算的实现。对于给定的两个复数：

$$a+ib$$

$$c+id$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，在有些场合也采用 j 来表示复数，含义是一样的，本书统一采用 i 来表示。

对于复数的加法运算比较简单，只需对应项相加即可，计算结果如下：

$$e+if=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+(b+d)i$$

按照上面的计算公式，可以编写如下复数加法的算法方法：

```
void cPlus(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)      //加法
{
    e[0]=a+c;
    f[0]=b+d;
}
```

其中，输入参数 a 和 b 分别为第一个复数的实部和虚部，输入参数 c 和 d 分别为第二个复数的实部和虚部，参数 e 和 f 为相加结果的实部和虚部。

同样对于复数的减法运算，计算公式如下：

$$e+if=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+(b-d)i$$

相应的复数减法的算法方法如下：

```
void cMinus(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)//减法
{
    e[0]=a-c;
    f[0]=b-d;
}
```

其中，输入参数 a 和 b 分别为被减复数的实部和虚部，输入参数 c 和 d 分别为减数复数的实部和虚部，参数 e 和 f 为相减结果的实部和虚部。

对于复数的乘法运算，计算公式如下：

$$e+if=(a+ib)*(c+id)= (ac-bd)+(ad+bc)i$$

相应的复数乘法的算法方法如下：

```
void cMul(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)      //乘法
{
    e[0]=a*c-b*d;
    f[0]=a*d+b*c;
}
```

其中，输入参数 a 和 b 分别为第一个复数的实部和虚部，输入参数 c 和 d 分别为第二个复数的实部和虚部，参数 e 和 f 为相乘结果的实部和虚部。

对于复数的除法运算，计算公式如下：

$$e+if=(a+ib)/(c+id)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

相应的复数除法的算法方法如下：

```
void cDiv(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)      //除法
{
```

```
        double sq;
        sq=c*c+d*d;
        e[0]=(a*c+b*d)/sq;
        f[0]=(b*c-a*d)/sq;
    }
```

其中，输入参数 a 和 b 分别为被除复数的实部和虚部，输入参数 c 和 d 分别为除数复数的实部和虚部，参数 e 和 f 为相除结果的实部和虚部。

下面将通过一个例子来看看，如何使用这些算法来进行复数的加法（+）、减法（-）、乘法（*）和除法（/）运算。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-12】

```
public class P6_12 {
    static void cPlus(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)        //加法
    {
        e[0]=a+c;
        f[0]=b+d;
    }
    static void cMinus(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)       //减法
    {
        e[0]=a-c;
        f[0]=b-d;
    }
    static void cMul(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)         //乘法
    {
        e[0]=a*c-b*d;
        f[0]=a*d+b*c;
    }
    static void cDiv(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)         //除法
    {
        double sq;
        sq=c*c+d*d;
        e[0]=(a*c+b*d)/sq;
        f[0]=(b*c-a*d)/sq;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        double a,b,c,d;
        double[] e={0},f={0};
        a=4;b=6;                                    //第一个复数的实部和虚部
        c=2;d=-1;                                   //第二个复数的实部和虚部
        cPlus(a,b,c,d,e,f);                         //加法
        System.out.printf("(%f+%fi) + (%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,c,d,e[0],f[0]);
        cMinus(a,b,c,d,e,f);                        //减法
        System.out.printf("(%f+%fi) - (%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,c,d,e[0],f[0]);
        cMul(a,b,c,d,e,f);                          //乘法
        System.out.printf("(%f+%fi) * (%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,c,d,e[0],f[0]);
        cDiv(a,b,c,d,e,f);                          //除法
        System.out.printf("(%f+%fi) / (%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,c,d,e[0],f[0]);
    }
}
```

在该程序中，首先初始化第一个复数和第二个复数的实部及虚部，然后分别调用前面预定义的复数加法、减法、乘法和除法的算法方法来进行计算，并输出相应的运算结果。该程序执行的结果，如图 6-12 所示。

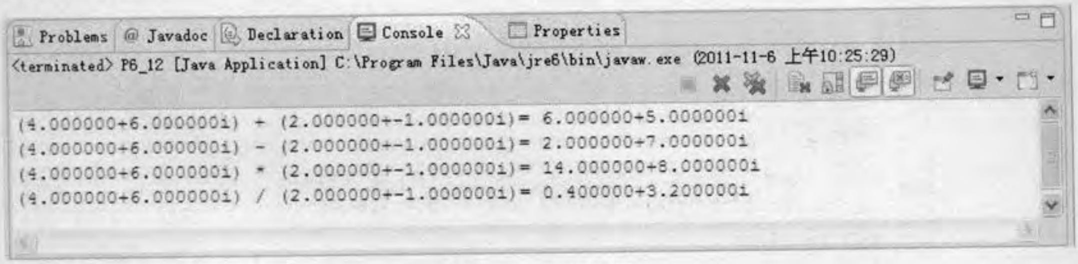


图 6-12　执行结果

6.4.2　复数的幂运算

复数的幂运算是指对于给定的一个复数，来计算如下表达式的值：

$$e+if=(a+ib)^n$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，n 为正整数。由于我们前面已经有了复数乘法的算法，因此复数的幂运算也就比较容易实现了。下面便是依照复数乘法而得到的复数幂运算的算法，代码示例如下：

```
void cPowN(double a,double b,int n,double[] e,double[] f)          //幂运算
{
        double result;
        int i;
        e[0]=a;
        f[0]=b;

        if(n==1)                                                    //1 次幂为其本身
        {
                return;
        }
        else
        {
                for(i=1;i<n;i++)
                {
                        cMul(e[0],f[0],a,b,e,f);                    //递推得到 n 次幂
                }
        }
}
```

这里，对于幂次 n=1 时，其实就是其本身；而对于幂次 n>1 时，则多次调用复数乘法的算法 cMul 来实现。

下面通过一个完整的例子来看看，复数幂运算的求解。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-13】

```
public class P6_13 {
        static void cMul(double a,double b,double c,double d,double[] e,double[] f)        //乘法
        {
                e[0]=a*c-b*d;
                f[0]=a*d+b*c;
        }
```

```
        static void cPowN(double a,double b,int n,double[] e,double[] f)
                                                                //幂运算
        {
                double result;
                int i;
                e[0]=a;
                f[0]=b;
                if(n==1)                                                        //1 次幂为其本身
                {
                        return;
                }
                else
                {
                        for(i=1;i<n;i++)
                        {
                                cMul(e[0],f[0],a,b,e,f);                         //递推得到 n 次幂
                        }
                }
        }
        public static void main(String[] args)
        {
                double a,b;
                double[] e={0},f={0};
                int n;
                a=1;b=1;                                                        //初始化复数的实部和虚部
                n=5;                                                            //幂次
                cPowN(a,b,n,e,f);                                               //幂运算
                System.out.printf("(%f+%fi)的%d 次幂= %f+%fi\n",a,b,n,e[0],f[0]);
        }
}
```

在该程序中，首先初始化复数的实部和虚部，以及需要计算的幂次 n。然后调用幂运算的算法方法 cPowN()来进行计算。该程序执行的结果，如图 6-13 所示。

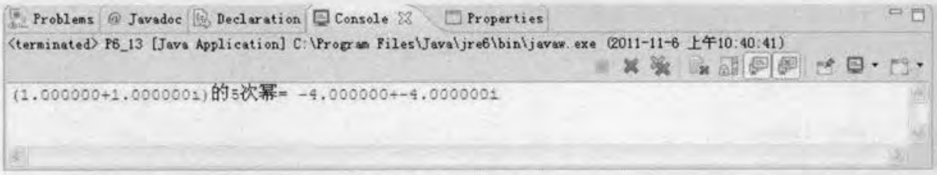


图 6-13　执行结果

另外，复数的幂运算也可以换一种思路来完成。在数学上，对于一个复数可以表示成极坐标的形式，示例如下：

$$a+ib= r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

依照这个规则，我们便可以得到复数幂运算的计算公式如下：

$$e+if=(a+ib)^n=(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

这样，我们只有首先计算得到 r 和 θ，之后就非常容易计算了。读者可以将上式转换为相应的 C 算法来实现。这里就不再详述了，读者可以作为一个练习来自行完成。

6.4.3　复指数运算

复指数是指以复数作为 e 指数的形式，例如：

$$e^{a+bi}$$

虽然复数可以表示成这种形式，但是这种表示不容易理解，往往还是需要将其进一步计算为常用的表示形式，示例如下：

$$e+if=e^{a+bi}$$

这个过程就是复指数运算。相应的算法还是要从数学上来寻找，根据数学规则可以将上式进一步计算：

$$e+if=e^{a+bi}=e^{a}e^{bi}=e^{a}(\cos b+i\sin b)$$

这样，我们便找到了复指数运算的结果：

$$e=e^{a}\cos b\text{，}f=e^{a}\sin b$$

依照上面的算法，便可以得到复指数运算的算法，代码示例如下：

```
void cExp(double a,double b,double[] e,double[] f)          //复指数运算
{
      double temp;
      temp=Math.exp(a);
     e[0]=temp*Math.cos(b);
      f[0]=temp*Math.sin(b);
}
```

在该方法中，输入参数 a 和 b 分别为复指数的实部和虚部，参数 e 和 f 是复指数运算的实部结果和虚部结果。

下面结合一个例子来看一个复指数运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-14】

```
public class P6_14
{
      static void cExp(double a,double b,double[] e,double[] f)          //复指数运算
      {
            double temp;
            temp=Math.exp(a);
           e[0]=temp*Math.cos(b);
            f[0]=temp*Math.sin(b);
      }
      public static void main(String[] args)
      {
            double a,b;
            double[] e={0},f={0};
            a=3;b=2;                                                    //初始化

            cExp(a,b,e,f);                                              //复指数运算
            System.out.printf("e 的(%f+%fi)次幂= %f+%fi\n",a,b,e[0],f[0]);
      }
}
```

在这里，主方法首先初始化复指数的实部和虚部，然后调用复指数算法方法来进行计算。该程序运行的结果，如图 6-14 所示。

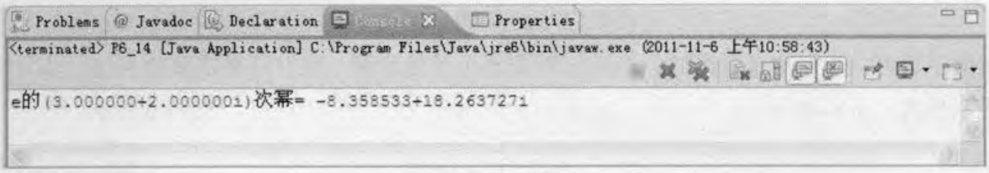


图 6-14　执行结果

6.4.4　复对数运算

复对数运算就是计算复变量的自然对数。也就是，对于 ln(a+bi)形式的复数，如何将其表示成常见的形式，示例如下：

$$e+if=\ln(a+bi)$$

在数学上，上式可以通过如下公式来计算：

$$e+if=\ln(a+bi)=\ln\sqrt{a^2+b^2}+i*arctg\frac{b}{a}$$

这样，我们便找到了对应的结果：

$$e=\ln\sqrt{a^2+b^2}，\ f=arctg\frac{b}{a}$$

参照上面的推算，便可以得到复对数运算的算法，代码示例如下：

```
void cLog(double a,double b,double[] e,double[] f)      //复对数运算
{
      double temp;
     temp=Math.log(Math.sqrt(a*a+b*b));
     e[0]=temp;                                           //实部
      f[0]=Math.atan2(b,a);                               //虚部
}
```

在该方法中，输入参数 a 和 b 分别为复对数的实部和虚部，参数 e 和 f 是复对数运算的实部结果和虚部结果。

下面结合一个例子来看一个复对数运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-15】

```
public class P6_15
{
      static void cLog(double a,double b,double[] e,double[] f)      //复对数运算
      {

            double temp;
           temp=Math.log(Math.sqrt(a*a+b*b));
           e[0]=temp;                                                 //实部
            f[0]=Math.atan2(b,a);                                     //虚部
      }
      public static void main(String[] args)
      {
            double a,b;
            double[] e={0},f={0};
            a=2.0;b=3.0;
            cLog(a,b,e,f);                                            //复对数运算
            System.out.printf("ln(%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,e[0],f[0]);
      }
}
```

在这里，主方法首先初始化了复指数的实部和虚部，然后调用复对数算法方法来进行计算。该程序运行的结果，如图 6-15 所示。

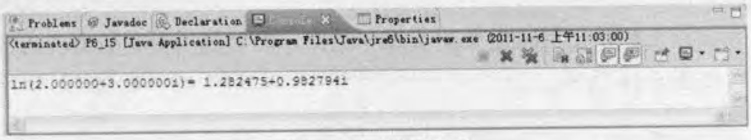


图 6-15　执行结果

6.4.5　复正弦运算

复正弦运算就是计算复变量的正弦值。也就是，对于 sin(a+bi)形式的复数，如何将其表示成常见的形式，示例如下：

$$e+if= \sin(a+bi)$$

在数学上，上式可以通过如下公式来计算：

$$\mathrm{e}+\mathrm{if}=\sin(\mathrm{a}+\mathrm{bi})=\sin a\cos(ib)+\cos a\sin(ib)=\sin a*\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}+i\cos a*\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}$$

这样，我们便找到了对应的结果：

$$\mathrm{e}=\sin a*\frac{e^{b}+e^{-b}}{2},\quad \mathrm{f}=\cos a*\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}$$

参照上面的推算，便可以得到复正弦运算的算法，代码示例如下：

```
void cSin(double a,double b,double[] e,double[] f)                    //复正弦
{
      double p,q;
     p=Math.exp(b);
      q=1/p;
     e[0]=Math.sin(a)*(p+q)/2.0;                                       //实部
      f[0]=Math.cos(a)*(p-q)/2.0;                                      //虚部
}
```

在该方法中，输入参数 a 和 b 分别为输入复数的实部和虚部，参数 e 和 f 是复正弦运算的实部结果和虚部结果。

下面结合一个例子来看一个复正弦运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-16】

```
public class P6_16
{
      static void cSin(double a,double b,double[] e,double[] f) //复正弦
      {
           double p,q;
         p=Math.exp(b);
           q=1/p;
         e[0]=Math.sin(a)*(p+q)/2.0;                                  //实部
           f[0]=Math.cos(a)*(p-q)/2.0;                                //虚部
      }
      public static void main(String[] args)
      {
           double a,b;
           double[] e={0},f={0};
           a=1.0;b=4.0;                                               //初始化

           cSin(a,b,e,f);                                             //复正弦运算
```

```
            System.out.printf("sin(%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,e[0],f[0]);
        }

}
```

在这里，主方法首先初始化了复指数的实部和虚部，然后调用复正弦算法方法来进行计算。该程序运行的结果，如图 6-16 所示。

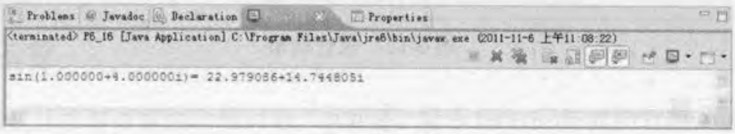


图 6-16　执行结果

6.4.6　复余弦运算

复余弦运算与复正弦运算类似，就是计算复变量的余弦值。也就是，对于 cos(a+bi)形式的复数，如何将其表示成常见的形式，示例如下：

$$e+if= \cos(a+bi)$$

在数学上，上式可以通过如下公式来计算：

$$e + if = \cos(a + bi) = \cos a\cos(ib) - \sin a\sin(ib) = \cos a * \frac{e^b + e^{-b}}{2} - i\sin a * \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

这样，我们便找到了对应的结果：

$$e = \cos a * \frac{e^b + e^{-b}}{2}，\quad f = -\sin a * \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

参照上面的推算，便可以得到复余弦运算的算法，代码示例如下：

```
void cCos(double a,double b,double[] e,double[] f)      //复余弦
{
    double p,q;
   p=Math.exp(b);
    q=1/p;
   e[0]=Math.cos(a)*(p+q)/2.0;                          //实部
    f[0]=-1.0*Math.sin(a)*(p-q)/2.0;                    //虚部
}
```

在该方法中，输入参数 a 和 b 分别为输入复数的实部和虚部，参数 e 和 f 是复余弦运算的实部结果和虚部结果。

下面结合一个例子来看一个复余弦运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-17】

```
public class P6_17 {
    static void cCos(double a,double b,double[] e,double[] f)      //复余弦
    {
        double p,q;
       p=Math.exp(b);
        q=1/p;
       e[0]=Math.cos(a)*(p+q)/2.0;                                  //实部
        f[0]=-1.0*Math.sin(a)*(p-q)/2.0;                            //虚部
    }
    public static void main(String[] args)
```

```
    {
        double a,b;
        double[] e={0},f={0};
        a=1.0;b=4.0;                                      //初始化
        cCos(a,b,e,f);                                    //复余弦运算
        System.out.printf("Cos(%f+%fi)= %f+%fi\n",a,b,e[0],f[0]);

    }
}
```

在这里，主方法首先初始化了复指数的实部和虚部，然后调用复余弦算法方法来进行计算。该程序运行的结果，如图 6-17 所示。

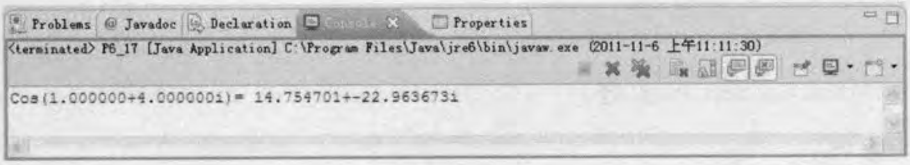


图 6-17　执行结果

6.5　阶　　乘

阶乘（Factorial）是排列、组合、概率以及微积分级数分析中的一个重要概念，很多表达式中都可以找到它的身影。对于一个正整数 n，n 的阶乘就是指所有小于等于 n 的正整数的乘积，一般记为 n!。阶乘的公式如下：

$$n! = n*(n-1)*(n-2)* \cdots *2 * 1$$

这一节，我们将从不同的角度来分析阶乘，从而采用不同的算法计算阶乘。

6.5.1　使用循环来计算阶乘

从 n!的表达式可以看出，其是非常有规律的从 1 开始逐个递增相乘，这样的结构很容易使用循环来实现。下面我们便给出采用 for 循环的阶乘算法，代码示例如下：

```
long fact(int n)                                  //求阶乘方法
{
    int i;
    long result=1;

    for(i=1;i<=n;i++)                             //循环计算
    {
        result*=i;
    }
    return result;
}
```

其中，输入参数 n 为需要计算的阶乘。在该方法中，使用 for 循环来逐个计算从 1 到 n 的乘积。方法的返回值便是 n!。

说明：在 Java 语言中，除了 for 循环外，还可以采用 while 循环、do…while 循环来实现。读者可以根据上述思路来编写相应的算法。

下面结合一个例子来看一个阶乘运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-18】

```
import java.util.Scanner;
public class P6_18
{
    static long fact(int n)                                    //求阶乘方法
    {
        int i;
        long result=1;

        for(i=1;i<=n;i++)                                      //循环计算
        {
            result*=i;
        }
        return result;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int i;                                                 //声明变量

        System.out.print("请输入要求阶乘的一个整数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        i=input.nextInt();                                     //输入数据
        System.out.println(i+"的阶乘结果为："+fact(i));          //调用方法

    }
}
```

该程序中，首先由用户输入一个要求阶乘的整数，然后调用 fact（）方法来计算阶乘。该程序执行的结果，如图 6-18 所示。

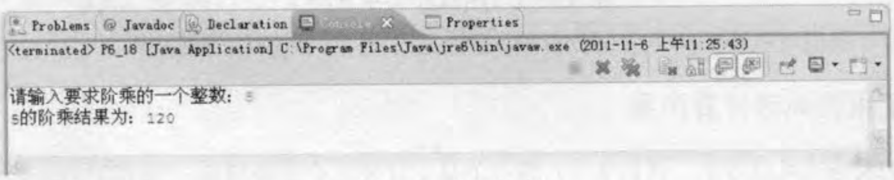


图 6-18　执行结果

6.5.2　使用递归来计算阶乘

下面，我们从另外一个角度来看一下阶乘。对于 n!，有如下的表达式：

$$n! = n*(n-1)*(n-2)* \cdots *2 * 1$$

而对于(n-1)!，则有如下的表达式：

$$(n-1)! = (n-1)*(n-2)* \cdots *2 * 1$$

从上面这两个表达式，我们可以看到阶乘具有明显的递推的性质，也就是符合如下的递推公式：

$$n! = n*(n-1)!$$

因此，我们可以采用递归的思想来计算阶乘。递归算法计算阶乘的代码示例如下：

```
long fact(int n)                                 //求阶乘方法
{
    if(n<=1)
        return 1;
    else
```

```
            return n*fact(n-1);                         //递归
    }
```

其中，输入参数 n 为需要计算的阶乘。在该方法中，当 n<=1 时，n!=1；当 n>1 时，通过递归调用来计算阶乘。方法 fact 是一个递归方法，在该方法内部中，程序又调用了名为 fact 的方法（即自身）。方法的返回值便是 n!。

下面结合一个例子来看一个阶乘运算的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-19】

```
import java.util.Scanner;
public class P6_19
{
    static long fact(int n)                                     //求阶乘方法
    {
        if(n<=1)
            return 1;
        else
            return n*fact(n-1);                                 //递归
    }
    public static void main(String[] args)
    {
         int i;                                                 //声明变量
        System.out.print("请输入要求阶乘的一个整数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        i=input.nextInt();                                      //输入数据
        System.out.println(i+"的阶乘结果为："+fact(i));          //调用方法
    }
}
```

该程序中，首先由用户输入一个要求阶乘的整数，然后调用递归方法 fact（）来计算阶乘。该程序执行的结果，如图 6-19 所示。

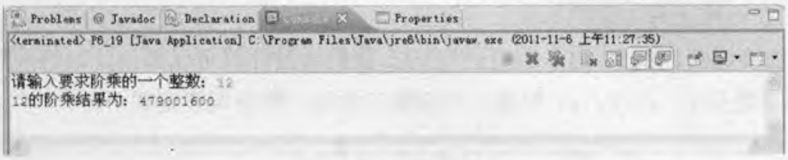


图 6-19　执行结果

从计算阶乘的例子可以看出，同一个问题，从不同的角度来分析，可以得到不同的计算算法。因此，读者当遇到一个问题时，需要从多个角度分析，考虑有哪些途径可以用来进行计算。不同算法的执行效率是不同的。

6.6　计算 π 的近似值

圆周率 π 是一个非常重要的常数，无论是在数学还是在物理学上都有很广泛的用途。圆周率 π 的值直接关系到计算圆周长、圆面积、球体积等。圆周率 π 一般定义为圆周长与圆直径之比。在数学分析学中，圆周率 π 被严格定义为满足如下等式的最小正实数：

$$\sin(x)=0$$

圆周率 π=3.141592653589793……，其是一个无限不循环实数，也就是所谓的无理数。

圆周率π的精确计算，从古至今都是非常重要的，随着发展也出现了很多种方法。这里，我们将分析几种典型的圆周率π的计算算法。

6.6.1 割圆术

割圆术（cyclotomic method）可以说是最为古老的计算圆周率π的方法。割圆术最早是由中国魏晋时期的著名数学家刘徽创立的，当时大约是公元3世纪中期。割圆术的基本思想就是不断倍增圆内接正多边形的边数，使其逐渐接近圆，从而计算圆的周长，并且可以推算出圆周率π的近似值。

我国古代经典的数学著作《九章算术》在第一章“方田”章中提到“半周半径相乘得积步”。这里，半周就是周长的一半，半径就是圆的半径，积步就是圆面积。这在现在看来是非常显而易见的，但在那个年代是很难得的。刘徽为了证明这个公式，在其著作《九章算术注》一书中，在公式“半周半径相乘得积步”后面写了一个长篇的注记，这篇注记便建立了割圆术的完整的体系。

刘徽当时得到的圆周率π近似值为3.1416。公元5世纪，祖冲之与其子以正24576边形来内接圆，计算得到误差小于八亿分之一的圆周率π。这个纪录在一千年后才被西方国家打破。

在国外，阿基米德使用正96边形得到小数点后3位的圆周率π精度，鲁道夫使用正262边形得到了小数点后35位的圆周率π精度。

1．割圆术的算法思想

下面简单介绍一下割圆术计算圆周率π的思想。假设一个圆如图6-20所示，其半径为1，在其内部内接一个正六边形。正六边形的边长为 y1。根据几何知识可知 y1=1，圆的周长近似为 L1=6*y1=6。圆周率π为圆周长与圆直径之比，也就是 L1/(2*1)=6/2=3，这就是按照内接正六边形得到的圆周率π近似值。这就是中国古代《周髀算经》中的“周三径一”。刘徽已经指出了其不准确性，需要进一步增加内接多边形的边数来逼近准确值。

下面，我们在内接正六边形的基础上再细分，即内接一个正12边形，如图6-21所示。显然，正12边形要更加接近圆。正12边形的边长为y2，我们通过计算可以得到此时的圆周率π。首先，这里图中 m+n=1。边长m、y1/2，y2构成一个直角三角形，根据勾股定理可得：

$$y_2^2 = m^2 + (\frac{y_1}{2})^2$$

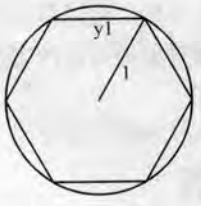


图6-20　圆内接正六边形

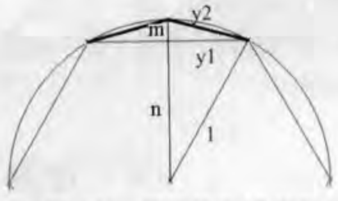


图6-21　圆内接正12边形

另外，边长n、y1/2和半径1构成一个直角三角形，根据勾股定理可得：

$$1^2 = n^2 + (\frac{y_1}{2})^2$$

我们还知道m和n构成圆的半径，也就是：

$$m+n=1$$

综合上面的三个式子，便可以得到：

$$y_2^2 = 2 - \sqrt{2^2 - y_1^2}$$

而圆周率 π 的近似值为：

$$\pi \approx \frac{12 * y_2}{2} = 6 * y_2$$

再进一步，如果内接 24 边形，其边长为 y3。则有下式：

$$y_3^2 = 2 - \sqrt{2^2 - y_2^2}$$

而圆周率 π 的近似值为：

$$\pi \approx \frac{24 * y_3}{2} = 12 * y_2$$

我们可以看到，这是一个递推的公式，示例如下：

$$y_n^2 = 2 - \sqrt{2^2 - y_{n-1}^2}$$

$$\pi \approx \frac{6 * 2^n * y_n}{2} = 3 * 2^n * y_2$$

只要 n 趋向于无穷大，便可以得到足够接近圆的多边形，计算的圆周率 π 也就越精确。

2．割圆术的算法实现

我们可以通过 Java 语言来实现上述的割圆术的算法。割圆术计算圆周率 π 算法的代码示例如下：

```
void cyclotomic(int n)          //割圆术算法
{
     int i,s;
     double k,len;
     i=0;
     k=3.0;                                          //初值
     len=1.0;                                        //边长初值
     s=6;                                            //初始内接正 6 边形
     while(i<=n)
     {
     System.out.printf("第%2d 次切割,为正%5d 边形,PI=%.24f\n",i,s,k*Math.sqrt(len));
     s*=2;                                   //边数加倍
        len=2-Math.sqrt(4-len);              //内接多边形的边长
        i++;
        k*=2.0;
     }
}
```

其中，输入参数 n 为需要在初始内接正六边形的基础上继续切割的次数。该方法完全遵照了前面的算法，将每次切割的结果打印输出。

下面结合一个例子来看一个割圆术算法在计算圆周率 π 时的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-20】

```
import java.util.Scanner;
public class P6_20 {
```

```
    static void cyclotomic(int n)                                //割圆术算法
    {
        int i,s;
        double k,len;
        i=0;
        k=3.0;                                                   //初值
        len=1.0;                                                 //边长初值
        s=6;                                                     //初始内接正 6 边形

        while(i<=n)
        {
    System.out.printf("第%2d 次切割,为正%5d 边形,PI=%.24f\n",i,s,k*Math.sqrt(len));
      s*=2;                                    //边数加倍
            len=2-Math.sqrt(4-len);            //内接多边形的边长
            i++;
            k*=2.0;
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int n;
       System.out.print("输入切割次数:");
       Scanner input=new Scanner(System.in);
       n=input.nextInt();                                  //输入切割次数
        cyclotomic(n);                                     //计算每次切割的圆周率
    }
}
```

该程序中，首先由用户输入一个切割次数，然后调用 cyclotomic（）方法来计算每次切割的圆周率 π 的近似值。该程序执行的结果，如图 6-22 所示。

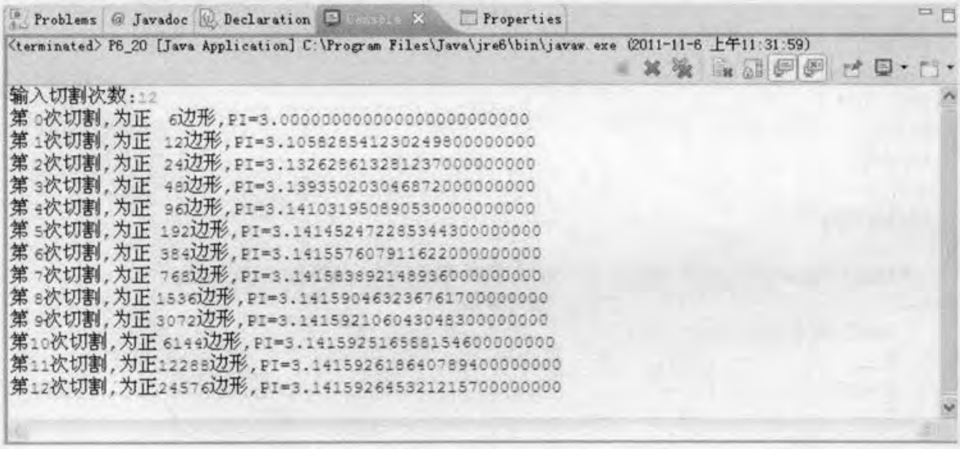


图 6-22　执行结果

由这个例子可见，切割的次数越多，内接多边形的边数也就越多，内接多边形也就越接近圆，计算所得的圆周率 π 也就越精确。

6.6.2　蒙特卡罗算法

蒙特卡罗（Monte Carlo）算法是一种非常重要的数值计算方法，在工程、金融、计算物理学等

领域都有着重要的应用。蒙特卡罗的名称源自于法国东南部小国摩纳哥的著名城市——蒙特卡罗。蒙特卡罗以赌博业闻名，是与拉斯维加斯和澳门齐名的赌城。蒙特卡罗算法是以概率为基础的，因此以此命名恰好体现了其特点。

1．蒙特卡罗算法思想

下面简单介绍一下使用蒙特卡罗算法计算圆周率 π 的思想。这个思想其实比较简单，我们首先看一个半径为 1 的圆，如图 6-23 所示。首先，我们推算图中阴影部分的面积。阴影部分是一个圆的 1/4，因此有如下的计算公式：

$$S_{阴影} = S_{圆} / 4 = \frac{\pi * r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

而图中正方形的面积为：

$$S_{正方形} = r^2 = 1$$

这样，按照图示建立一个坐标系。如果均匀地向正方形内撒点，那么落入阴影部分的点数比上全部的点数应该就是 $S_{阴影}/S_{正方形}=\pi/4$。根据概率统计的规律，只要撒的点足够多，那么将得到近似的结果。通过这个原理便可以计算圆周率 π 的近似值，这就是蒙特卡罗算法。

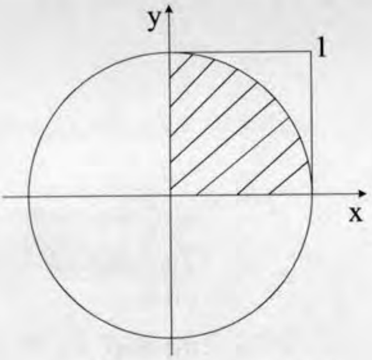


图 6-23　蒙特卡罗算法示意

2．蒙特卡罗算法实现

我们可以采用 Java 语言来实现上述算法。蒙特卡罗算法有几个关键点，我们可以分别采用如下方法来实现：

- 均匀撒点：在 C 语言中可以使用随机方法来实现，产生[0，1]之间随机的坐标值[x，y]。
- 区域判断：图中阴影部分的特点是距离坐标原点的距离小于等于 1，这样，可以通过计算判断 $x^2+y^2<=1$ 来实现。

蒙特卡罗算法计算圆周率 π 的代码示例如下：

```
double montePI(int n)                    //蒙特卡罗算法
{
    int i,sum;
    double PI;
    double x,y;
    sum=0;
```

```
        Random r=new Random();
        for(i=1;i<n;i++)
        {
            x=r.nextDouble();                    //产生 0~1 之间的一个随机数
            y=r.nextDouble();                    //产生 0~1 之间的一个随机数
            if((x*x+y*y)<=1)                     //若在阴影区域
            sum++;                               //计数
        }
        PI=4.0*sum/n;                            //计算 PI
        return PI;
    }
```

其中，输入参数 n 为撒点的次数。该方法完全遵循了前面的蒙特卡罗算法过程，返回值便是圆周率 π 的近似值。

下面结合一个例子来看一个蒙特卡罗算法在计算圆周率 π 时的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-21】

```
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;
public class P6_21
 {
    static double montePI(int n) //蒙特卡罗算法
    {
        int i,sum;
        double PI;
        double x,y;
        sum=0;

        Random r=new Random();
        for(i=1;i<n;i++)
        {
            x=r.nextDouble();                    //产生 0~1 之间的一个随机数
            y=r.nextDouble();                    //产生 0~1 之间的一个随机数
            if((x*x+y*y)<=1)                     //若在阴影区域
                sum++;                           //计数
        }
        PI=4.0*sum/n;                            //计算 PI
        return PI;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int n;
        double PI;

        System.out.print("输入点的数量:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();                       //输入撒点个数
        PI=montePI(n);                           //计算 PI
        System.out.println("PI="+PI);            //输出结果
    }
}
```

在程序中，主方法首先接收用户输入的撒点个数，然后调用 MontePI（）算法方法来计算圆周率 π 的近似值。该程序执行的结果，如图 6-24 所示。

图 6-24　执行结果

读者可以多次执行该程序，会发现撒点的数量越多，圆周率 π 计算的精度也就越高。同时，这种方法计算的圆周率 π 值具有很大的随机性，在不同的运行时间，即使输入同样的撒点数，得到的结果也是不相同的。

6.6.3　级数公式

其实前面的蒙特卡罗算法并不能算作为一个计算圆周率 π 的公式，刘徽创立的割圆术可以说是最早的公式。其中用到了递推和极限的思想，在当时都是非常先进的。但割圆术需要的计算量比较大，随着技术的发展，目前产生了多种效率更高的计算圆周率 π 的公式。

1. 常用的圆周率 π 计算公式简介

圆周率 π 计算公式往往凝聚了众多数学家的智慧，作为扩展知识面，这里列举一些比较著名的圆周率 π 计算公式。

- 马青公式。

马青公式是在 1706 年，由英国天文学家约翰·马青提出的，马青公式的表达式如下：

$$\pi = 16 * \arctan\frac{1}{5} - 4 * \arctan\frac{1}{239}$$

依照这个公式，可以计算到 100 的圆周率 π 。

- 拉马努金公式。

拉马努金公式是在 1914 年，由印度数学家拉马努金提出的，当时其总共提出了 14 条类似的计算公式。后人使用该公式计算得到 17,500,000 位的圆周率 π 。

- 丘德诺夫斯基公式。

丘德诺夫斯基公式是对拉马努金公式的改进，1989 年由丘德诺夫斯基提出。丘德诺夫斯基兄弟使用该公式计算得到 4,044,000,000 位的圆周率 π 。

- 高斯-勒让德公式。

高斯-勒让德公式效率非常高，迭代 20 次便可以计算到 100 万位的圆周率 π 。日本的数学家使用该公式计算到了圆周率的 206,158,430,000 位，创出当时的世界纪录。

- BBP 公式。

BBP 公式也称为 Bailey-Borwein-Plouffe 算法，这是一个全新的算法，可以计算到圆周率 π 的任意一位，而不用计算该位之前的各位。圆周率 π 的分布式计算就是基于这种算法的。

2. 级数公式的算法思想

在微积分中，对一个表达式进行级数展开并取极限便可以得到一系列的迭代计算公式。对于圆周率 π 也可以采用相同的方法来得到级数公式。这样的级数公式很多，依赖于不同的级数展开表达

式，例如下面就是一个很典型的例子：

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\cdots$$

关于级数展开并不是本书的重点内容，读者可以参阅微积分相关的书籍，这里仅是引用相应的公式来实现相应的程序算法。对上式左右两边同时乘 2，得到如下结果：

$$\pi=2*(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\cdots)$$

这便可以作为圆周率 π 的计算公式，其中的各项非常有规律。从第二项开始，每一项都是在前一项的基础上多乘了一个分数，该分数的分母增加 2，而分子增加 1。这样，我们便可以采用递推的算法来实现。

3. 级数公式的算法实现

依照上面的级数公式的算法思想，可以编写相应的计算圆周率 π 的程序，代码示例如下：

```
double jiShuPI()                              //级数算法
{
    double PI,temp;
    int n,m;
    n=1;                                      //分子
    m=3;                                      //分母
    temp=2;                                   //精度
    PI=2;                                     //初始化 PI
    while(temp>1e-15)                         //数列大于指定的精度
    {
        temp=temp*n/m;                        //计算一个项的值
        PI+=temp;                             //添加到 pi 中
        n++;                                  //分子增加 1
        m+=2;                                 //分母增加 2
    }
    return PI;                                //返回 PI
}
```

这里，严格遵循了前面的级数公式的算法。方法中设置了一个精度 1e-15，当计算的每一项大于该精度的时候才计算，否则将退出并返回圆周率 π 。

下面结合一个例子来看一个级数公式的算法在计算圆周率 π 时的使用。完整的程序代码示例如下：

【程序 6-22】

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
double JishuPI()                          //级数算法
{
    double PI,temp;
    int n,m;
    n=1;                                  //分子
    m=3;                                  //分母
    temp=2;                               //精度
    PI=2;                                 //初始化 PI
    while(temp>1e-15)                     //数列大于指定的精度
    {
        temp=temp*n/m;                    //计算一个项的值
        PI+=temp;                         //添加到 pi 中
        n++;                              //分子增加 1
```

```
            m+=2;                          //分母增加 2
        }
        return PI;                         //返回 PI
}
void main()
{
        double PI;
      PI=JishuPI();                        //计算
      printf("PI=%f\n",PI);                //输出结果
}
```

在程序中，主方法直接调用 JishuPI（）算法方法来计算圆周率 π 的近似值。该程序执行的结果，如图 6-25 所示。可见，得到的结果非常接近圆周率 π 。

图 6-25　执行结果

6.7　矩阵运算

矩阵是非常重要的数据表示形式，其在线性代数、数值计算和方程求解等领域都有着广泛的应用。在 C 语言中，矩阵可以使用二维数组的形式来表示。矩阵的基本运算包括加法、减法、乘法和求逆等，此外还包括一些更为复杂的运算，例如转置、稀疏矩阵运算、求秩等。这里，我们先介绍最基本的加法、减法和乘法运算。

6.7.1　矩阵加法

矩阵加法比较简单，只需对应项相加即可。矩阵加法的前提条件是两个参与运算矩阵的行数和列数必须对应相等。例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 11 & -1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 18 & 7 \\ 2 & 11 & 15 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 26 & 10 \\ 13 & 10 & 20 \\ 23 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

矩阵加法的算法方法示例如下：

```
void MatrixPlus(double A[][],double B[][],int m,int n,double C[][])
{
        int i,j;
        for(i=0;i<m;i++)
            for(j=0;j<n;j++)
            {
              C[i][j]=A[i][j]+B[i][j];                    //各元素相加
            }
}
```

这里，输入参数 A[][]和 B[][]为参与运算的矩阵，输入参数 m 和 n 分别为行数和列数，参数 C[][]为相加结果矩阵。

下面结合一个实例来看看矩阵加法算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-23】

```
public class P6_23
{
    static void MatrixPlus(double A[][],double B[][],int m,int n,double C[][])
    {
        int i,j;
        for(i=0;i<m;i++)
            for(j=0;j<n;j++)
            {
                C[i][j]=A[i][j]+B[i][j];                    //各元素相加
            }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        double A[][]={{1.0,2.0,3.0},                        //矩阵 A
                    {4.0,5.0,6.0},
                    {7.0,8.0,9.0}};
        double B[][]={{2.0,-2.0,1.0},                       //矩阵 B
                    {1.0,3.0,9.0},
                    {17.0,-3.0,7.0}};
        double[][] C=new double[3][3];                      //结果矩阵 C
        int m,n,i,j;
        m=3;                                                //行数
        n=3;                                                //列数

        System.out.print("矩阵 A 和 B 相加的结果为：\n");
        MatrixPlus(A,B,m,n,C);                              //运算
        for(i=0;i<m;i++)
        {
            for(j=0;j<n;j++)
            {
                System.out.printf("%10.6f ",C[i][j]);           //输出结果
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
}
```

在该程序中，首先初始化参与运算的矩阵 A 和 B，这两个矩阵的行数为 3，列数为 3，分别采用二维数组来表示。然后调用 MatixPlus () 方法来进行矩阵加法，最后输出相加的结果矩阵 C。该程序执行的结果，如图 6-26 所示。

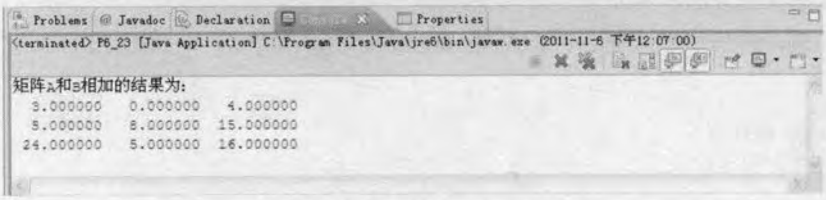


图 6-26　执行结果

6.7.2　矩阵减法

矩阵减法也是比较简单，只需对应项相减即可。矩阵减法的前提条件是两个参与运算矩阵的行数和列数必须对应相等。例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 11 & -1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 18 & 7 \\ 2 & 11 & 15 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -4 \\ 9 & -12 & -10 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵减法的算法方法示例如下：

```
void MatrixPlus(double A[][],double B[][],int m,int n,double C[][])
{
    int i,j;
    for(i=0;i<m;i++)
        for(j=0;j<n;j++)
        {
            C[i][j]=A[i][j]-B[i][j];                    //各元素相加
        }
}
```

这里，输入参数 A[][]和 B[][]为参与运算的矩阵，输入参数 m 和 n 分别为行数和列数，参数 C[][]为相减结果矩阵。

下面结合一个实例来看看矩阵减法算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-24】

```
public class P6_24
{
    static void MatrixPlus(double A[][],double B[][],int m,int n,double C[][])
    {
        int i,j;
        for(i=0;i<m;i++)
            for(j=0;j<n;j++)
            {
                C[i][j]=A[i][j]-B[i][j];                //各元素相加
            }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        double A[][]={{1.0,2.0,3.0},                    //矩阵 A
                      {4.0,5.0,6.0},
                      {7.0,8.0,9.0}};
        double B[][]={{2.0,-2.0,1.0},                   //矩阵 B
                      {1.0,3.0,9.0},
                      {17.0,-3.0,7.0}};
        double[][] C=new double[3][3];                  //结果矩阵 C
        int m,n,i,j;
        m=3;                                            //行数
        n=3;                                            //列数
        System.out.print("矩阵 A 和 B 相减的结果为：\n");
        MatrixPlus(A,B,m,n,C);                          //运算
        for(i=0;i<m;i++)
        {
            for(j=0;j<n;j++)
            {
                System.out.printf("%10.6f ",C[i][j]);   //输出结果
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
}
```

在该程序中，首先初始化参与运算的矩阵 A 和 B，这两个矩阵的行数为 3，列数为 3，分别采

用二维数组来表示。然后调用 MatixMinus（）方法来进行矩阵减法，最后输出相减的结果矩阵 C。该程序执行的结果，如图 6-27 所示。

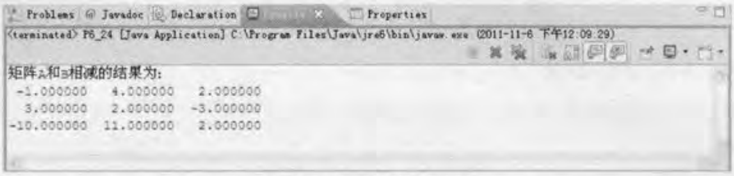


图 6-27　执行结果

6.7.3　矩阵乘法

矩阵的乘法要相对复杂些。对于给定的 m×n 矩阵 A 和 n×k 矩阵 B，其乘积矩阵为：

$$C=AB$$

这里，乘积矩阵 C 为 m×k 阶的。两个矩阵参与相乘的前提条件是，矩阵 A 的列数必须等于矩阵 B 的行数。这时，还需要指出的是矩阵的乘法是不具备交换性的，也就是：

$$AB \neq BA$$

在数学上，乘积矩阵 C 中各个元素的值为：

$$c_{ij}=\sum_{t=0}^{n-1} a_{it} b_{tj}$$

这里，i=0，1，……，m-1；j=0，1，……，k-1。

形象地说，在运算时，第 1 个矩阵 A 的第 i 行的所有元素与第 2 个矩阵 B 第 j 列的元素对应相乘，并把相乘的结果相加，最终得到的值就是矩阵 C 的第 i 行第 j 列的值。例如，如下显示了两个矩阵相乘的过程：

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 11 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 18 \\ 2 & 11 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times0+8\times2+3\times10 & 5\times18+8\times11+3\times3 \\ 11\times0+0\times2+5\times10 & 11\times18+0\times11+5\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 187 \\ 50 & 213 \end{bmatrix}$$

我们可以根据上述矩阵乘法的规则来编写矩阵乘法的算法，代码示例如下：

```
void matrixMul(double A[][],double B[][],int m,int n,int k,double C[][])
{
    int i,j,l;
    for (i=0; i<m; i++)
    {
        for (j=0; j<n; j++)
        {
            C[i][j]=0;
            for(l=0; l<k; l++)
            {
                C[i][j] += (A[i][l] * B[l][j]);    //相乘累加
            }
        }
    }
}
```

这里，输入参数 A[][]和 B[][]为参与运算的矩阵，输入参数 m 为矩阵 A 的行数，输入参数 n 为矩阵 A 的列数，输入参数 k 为矩阵 B 的列数，参数 C[][]为相乘结果矩阵。

下面结合一个例子来看看如何进行矩阵相乘，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-25】

```
public class P6_25
{
    static void matrixMul(double A[][],double B[][],int m,int n,int k,double C[][])
    {
        int i,j,l;
        for (i=0; i<m; i++)
        {
            for (j=0; j<n; j++)
            {
                C[i][j]=0;
                for(l=0; l<k; l++)
                {
                    C[i][j] += (A[i][l] * B[l][j]);     //相乘累加
                }
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        double A[][]={{1.0,2.0,3.0},                     //矩阵 A
                      {4.0,5.0,6.0},
                      {7.0,8.0,9.0}};
        double B[][]={{2.0,-2.0,1.0},                    //矩阵 B
                      {1.0,3.0,9.0},
                      {17.0,-3.0,7.0}};
        double[][] C=new double[3][3];                   //结果矩阵 C
        int m,n,k,i,j;
        m=3;                                             //行数
        n=3;                                             //列数
        k=3;
        System.out.print("矩阵 A 和 B 相乘的结果为：\n");
        matrixMul(A,B,m,n,k,C);                          //运算
        for(i=0;i<m;i++)
        {
            for(j=0;j<n;j++)
            {
                System.out.printf("%10.6f ",C[i][j]);//输出结果
            }
            System.out.print("\n");
        }
    }
}
```

在该程序中，首先初始化参与运算的矩阵 A 和 B，这两个矩阵的行数为 3，列数为 3，分别采用二维数组来表示。然后调用 matrixMul () 方法来进行矩阵乘法，最后输出相乘的结果矩阵 C。该程序执行的结果，如图 6-28 所示。

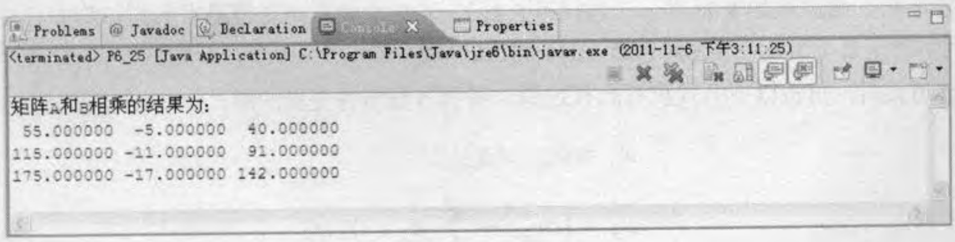


图 6-28 执行结果

6.8 方程求解

在实际应用中，很多问题都可以简化为方程或者方程组的形式。这样，问题的求解也就转化为方程的求解。一般来说，方程可以划分为线性方程和非线性方程两类。

- 线性方程：方程中任何一个变量的幂次都是 1 次。例如：y=4x-3 等。这类方程在作图的时候会呈现一种直线，因此被称为线性方程。对于线性方程，对于自变量 x 的一个值，对应的因变量 y 是一个确定的值。线性方程求解比较简单。
- 非线性方程：方程中包含一个变量的幂次不是 1 次。例如：$y=4x^2-3$、y=sin(x)-3x+1 等。这类方程在作图的时候会呈现各式各样的曲线，因此被称为非线性方程。对于大部分的非线性方程，往往求解很难，数学上往往计算其近似解。

本节将首先介绍简单的线性方程的求解，然后介绍两种非线性方程近似解的计算。

6.8.1 线性方程求解——高斯消元法

高斯（Gauss）消元法是线性方程组最经典的求解算法，一般也称为简单消元法或者高斯消去法。高斯消元法虽然以数学家高斯命名，但其实该方法的思想最早出现于中国古代的数学专著《九章算术》，大约在公元前 150 年。

1. 高斯消元法的算法思想

下面来看看高斯消元法的基本原理。对于一个线性方程组如下：

AX=B

其中，A 为系数矩阵，x 为变量列矩阵，B 为常数列矩阵。假设该方程组有 equnum 个方程，每个方程有 varnum 个变量。我们可以将系数矩阵 A 和常数列矩阵 B 组合成一个增广矩阵 A’，然后对该矩阵中的每一个元素进行如下的消元操作：

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$$

其中：i=k+1、……、n；

j=k+1、……、n+1；

k=1、……、n-1。

也就是说，循环处理矩阵的 0~equnum-1 行（用 k 表示当前处理的行），并设当前处理的列为 col（设初值为 0），每次找第 k 行以下（包括第 k 行）col 列中元素绝对值最大的列与第 k 行交换。如果 col 列中的元素全为 0，那么则处理 col+1 列，k 不变。

经过消元后，再按以下公式执行回代过程，得到方程组各变量的解：

$$x_n = a_{nn+1} / a_{nn}$$

$$x_k = (a_{kn+1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j) / a_{kk}$$

其中：k=n-1、……、1。

在整个算法处理的过程中，我们可以根据高斯消元得到的行阶梯矩阵的值来判断该方程组解的形式。主要有如下几种情况：

- 无解：当最后的行阶梯矩阵中出现（0, 0, …, 0, a）的形式，其中 a 为不等于 0 的数，这显然是不可能的，因此说明该方程是无解的。
- 唯一解：若最后的行阶梯矩阵形成了严格的上三角阵，判断条件是 k=equ，即行阶梯矩阵形成了严格的上三角阵。这种情况具有唯一解，可利用回代法逐一求出方程组的解。
- 无穷多解：若最后的行阶梯矩阵不能形成严格的上三角形，条件是 k<equ。此时，自由变量的个数即为 equ - k，这种情况下有无穷多解。

2. 高斯消元法的算法实现

我们可以根据前面所述的算法思想来编写相应的 Java 语言实现，详细的代码示例如下：

```
static final int MaxNum=10;                                   //变量数量的最大值
static int array[][]=new int[MaxNum][MaxNum];                 //输入的增广矩阵
static int[] unuse_result=new int[MaxNum];                    //判断是否是不确定的变量

int GaussFun(int equ,int var,int result[])                    //高斯消元法算法
{
    int i,j,k,col,num1,num2;
    int max_r,ta,tb,gcdtemp,lcmtemp;
    int temp,unuse_x_num,unuse_index=0;
    col=0;                                  //第 1 列开始处理
    for(k=0;k<equ && col<var;k++,col++)     //循环处理增广矩阵中的各行
    {
        max_r=k;                            //保存绝对值最大的行号
        for(i=k+1;i<equ;i++)
          {
            if(Math.abs(array[i][col])>Math.abs(array[max_r][col]))
              {
                max_r=i;                    //保存绝对值最大的行号
              }
          }
        if(max_r!=k)                        //最大行不是当前行，则与第 k 行交换
          {
            for(j=k;j<var+1;j++)            //交换矩阵右上角数据
              {
                   temp=array[k][j];
                   array[k][j]=array[max_r][j];
                   array[max_r][j]=temp;
              }
          }
        if(array[k][col]==0)                //说明 col 列第 k 行以下全是 0，则处理当前行的下一列
        {
            k--;
            continue;
        }
        for(i=k+1;i<equ;i++)                //查找要删除的行
        {
            if(array[i][col]!=0)            //如果左列不为 0，进行消元运算
            {
                   num1=Math.abs(array[i][col]);
                   num2=Math.abs(array[k][col]);
                   while(num2!= 0)
```

```
                    {
                        temp=num2;
                        num2=num1%num2;
                        num1=temp;
                    }
                    gcdtemp=num1;  //最大公约数
                    lcmtemp=(Math.abs(array[i][col]) * Math.abs(array[k][col]))/gcdtemp;//求最小公倍数

                ta=lcmtemp/Math.abs(array[i][col]);
                tb=lcmtemp/Math.abs(array[k][col]);
                if(array[i][col]*array[k][col]<0)     //如果两数符号不同
                    {
                    tb=-tb;                          //异号的情况是两个数相加
                    }
                for(j=col;j<var+1;j++)
                    {
                    array[i][j]=array[i][j]*ta-array[k][j]*tb;
                    }
            }
        }
    }
    for(i=k;i<equ;i++)                           //判断最后一行最后一列
     {
        if(array[i][col]!=0)                     //若不为 0，表示无解
          {
            return -1;                           //返回-1，表示无解
          }
     }
    if(k<var)                                    //自由变量有 var-k 个，即不确定的变量至少有 var-k 个.
    {
        for(i=k-1;i>=0;i--)
        {
            unuse_x_num=0;                       //判断该行中不确定变量数量，
            for(j=0;j<var;j++)
            {
                if(array[i][j]!=0 && unuse_result[j]!=0)
                {
                    unuse_x_num++;
                    unuse_index=j;
                }
            }
            if(unuse_x_num>1)
             {
                continue;                        //若超过 1 个，则无法求解
             }
            temp=array[i][var];
            for(j=0;j<var;j++)
            {
                if(array[i][j]!=0 && j!=unuse_index)
                  {
                    temp-=array[i][j]*result[j];
                  }
            }
            result[unuse_index]=temp/array[i][unuse_index];     //求出该变量
            unuse_result[unuse_index]=0;                        //该变量是确定的
        }
```

```
        return var-k;                              //自由变量有 var-k 个
    }
    for(i=var-1;i>=0;i--)                          //求解
    {
        temp=array[i][var];
        for(j=i+1;j<var;j++)
        {
            if(array[i][j]!=0)
              {
                temp-=array[i][j]*result[j];
              }
        }
        if(temp % array[i][i]!=0)                  //若不能整除
          {
            return -2;                             //返回有浮点数解，但无整数解
          }
        result[i]=temp/array[i][i];
    }
    return 0;
}
```

在这里，array 为输入的增广矩阵，MaxNum 定义了变量的最大数目。GaussFun 是高斯消元法算法的方法主体，其中，输入参数 equ 为方程的数量，var 为变量的个数，数组 result 用于保存方程组的解。整个代码处理过程严格遵循了前面所述的算法，读者可以对照两者来加深理解。

3．高斯消元法的算法应用

有了高斯消元法，我们便可以轻松地计算线性方程组的求解。这里举例来说明高斯消元算法的应用。对于如下的线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1+5x_2-4x_3=0\\7x_1+2x_2+6x_3=-4\\4x_1-x_2+5x_3=-5\end{cases}$$

首先，我们需要得到增广矩阵，示例如下：

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -4 & 0\\7 & 2 & 6 & -4\\4 & -1 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

有了这些之后，便可以调用前面对高斯消元算法来求解方程组，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-26】

```
public class P6_26 {
    static final int MaxNum=10;
    static int array[][]={{3,5,-4,0},
                          {7,2,6,-4},
                          {4,-1,5,-5}};                //输入的增广矩阵
    static int[] unuse_result=new int[MaxNum];         //判断是否是不确定的变量

public static void main(String[] args)
    {
        int i, type;
           int equnum, varnum;
            int[] result=new int[MaxNum];              //保存方程的解
            equnum=3;
```

```
            varnum=3;

            type=GaussFun(equnum,varnum,result); //调用高斯方法

            if(type==-1)                                    //无解
             {
                System.out.printf("该方程无解!\n");
             }
            else if(type==-2)                //只有浮点数解
             {
                System.out.printf("该方程有浮点数解，无整数解!\n");
             }
            else if(type>0)                  //无穷多个解
            {
                System.out.printf("该方程有无穷多解! 自由变量数量为%d\n",type);
                for(i=0;i<varnum;i++)
                {
                    if(unuse_result[i]!=0)
                      {
                       System.out.printf("x%d 是不确定的\n",i+1);
                      }
                    else
                      {
                       System.out.printf("x%d: %d\n",i+1,result[i]);
                      }
                }
            }
            else
             {
                    System.out.printf("该方程的解为:\n");
                for(i=0;i<varnum;i++) //输出解
                {
                    System.out.printf("x%d=%d\n",i+1,result[i]);
                }
             }
    }
}
```

在该程序中，首先初始化增广矩阵 array，方程个数 equnum 为 3，变量个数 varnum 为 3。方程的解保存在数组 result 中。初始化这些参数后，调用 GaussFun（）方法来进行高斯消元算法的计算，最后根据解的情况来输出结果。由于篇幅的关系，这里没有列出高斯消元算法 GaussFun（）方法，该方法就是前面所述的算法方法。该程序执行的结果，如图 6-29 所示。

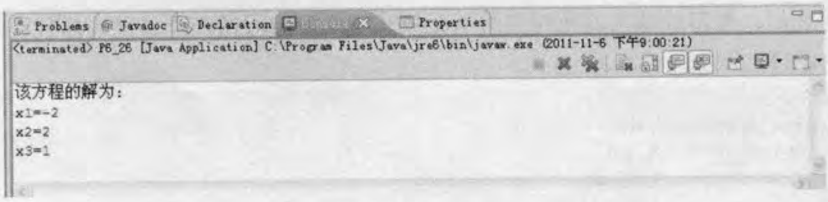


图 6-29　执行结果

6.8.2　非线性方程求解——二分法

非线性方程的求解一般都比较困难，其中二分法是最典型最简单的一种求解算法。在有的地方，二分法也称为对分法。

1．二分法的算法思想

对于函数 f(x)，如果 x=c 时，f(c)=0，那么把 x=c 称为函数 f(x)的零点。求解方程就是计算该方程所有的零点。对于二分法，假定非线性方程 f(x)在区间（x，y）上连续。如果存在两个实数 a 和 b 属于区间（x，y），使得满足如下式子：

$$f(a)*f(b)<0$$

也就是说 f(a)和 f(b)异号，这就说明在区间（a,b）内一定有零点，也就是至少包含该方程的一个解。

然后，我们计算 f[(a+b)/2]。此时，如果假设如下的条件：

$$f(a)<0，f(b)>0，a<b$$

我们可以根据 f[(a+b)/2]的值来判断方程解的位置，

- 如果 f[(a+b)/2]=0，该点就是零点。
- 如果 f[(a+b)/2]<0，则表示在区间（(a+b)/2，b)内有零点，(a+b)/2≥a，重复前面的步骤来进行判断。
- 如果 f[(a+b)/2]>0，则表示在区间(a,(a+b)/2)内有零点，(a+b)/2≤b，重复前面的步骤来进行判断。

这样，通过上述步骤就可以不断接近零点。由于非线性方程在很多时候都没有精确解，因此我们可以设置一个精度，当 f(x)小于该精度时就认为找到了零点，也就是找到了方程的解。

这种通过每次把 f(x)的零点所在小区间收缩一半的方法，使区间的两个端点逐步迫近函数的零点，以求得零点的近似值的方法，也就是二分法。二分法是比较简单的非线性方程求解方法，但二分法不能计算复根和重根，这是它的不足。

2．二分法的算法实现

我们可以根据前面所述的算法思想来编写相应的 Java 语言实现，详细的代码示例如下：

```
double erfen(double a,double b,double err) //二分算法
{
    double c;
    c=(a+b)/2.0;                        //中间值

    while(Math.abs(func(c))>err && func(a-b)>err)
    {
        if(func(c)*func(b)<0)           //确定新的区间
          {
            a=c;
          }
        if(func(a)*func(c)<0)
          {
            b=c;
          }
        c=(a+b)/2;                      //二分法确定新的区间
    }

     return c;
}
```

这里，func()为待求解的非线性方程。方法 erfen()便是二分法求解的算法主体，其中输入参数 a 和 b 分别为待求解的区间，输入参数 err 为误差精度。该方法的返回值便是通过二分法求得的解。整个代码处理过程严格遵循了前面所述的算法，读者可以对照两者来加深理解。

3. 二分法的算法应用

下面我们通过一个具体的例子来看一下二分法求解非线性方程的应用。例如，对于如下的非线性方程：

$$2x^3 - 5x - 1 = 0$$

我们令 $f(x) = 2x^3 - 5x - 1$，那么当 x=1.0 和 x=2.0 时，该函数的值分别如下：

$$f(1) = 2*1^3 - 5*1 - 1 = -4$$

$$f(2) = 2*2^3 - 5*2 - 1 = 25$$

很显然 $f(1)*f(2) < 0$，也就是在区间[1.0，2.0]之间应该有一个方程的解。我们根据二分法来求解该方程的解，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-27】

```
public class P6_27
{
    static double func(double x)                              //方法
    {
        return   2*x*x*x-5*x-1;
    }
    static double erfen(double a,double b,double err)          //二分算法
    {
        double c;
        c=(a+b)/2.0;                                          //中间值

        while(Math.abs(func(c))>err && func(a-b)>err)
        {
            if(func(c)*func(b)<0)                             //确定新的区间
              {
                a=c;
              }
            if(func(a)*func(c)<0)
              {
                b=c;
              }
            c=(a+b)/2;                                        //二分法确定新的区间
        }

         return c;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
         double a=1.0,b=2.0;                        //初始区间
         double err=1e-5;                           //绝对误差
        double result;

        result=erfen(a,b,err);
        System.out.print("二分法解方程:2*x*x*x-5*x-1\n");
        System.out.printf("结果 x=%.5f\n",result); //输出解
    }
}
```

在该程序中，首先定义 func()方法作为待求解的方程。主方法中首先初始化求解区间，以及绝

对误差。然后，调用方法求解方程。该程序执行的结果，如图 6-30 所示。

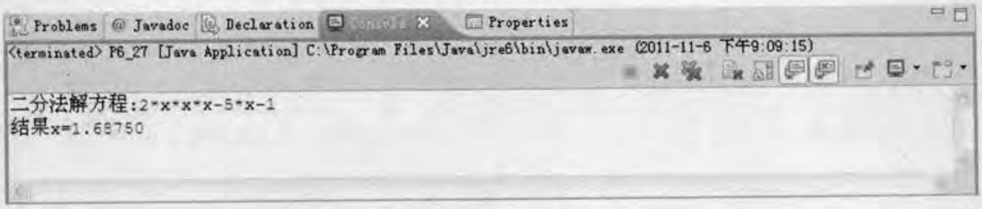


图 6-30　执行结果

6.8.3　非线性方程求解——牛顿迭代法

前面我们知道，二分法的一个缺点就是不能计算复根和重根，而且收敛的速度比较慢。在二分法之后，数学家又提出了其他许多求解算法，牛顿迭代法就是很经典的一个。牛顿迭代法（Newton's method）是根据函数 f(x)的泰勒基数的前几项来寻找方程的根的。牛顿迭代法有时也称为牛顿-拉夫逊迭代法（Newton-Raphson method）。牛顿迭代法具有平方收敛的速度，而且还可以用来计算方程的复根和重根。

1．牛顿迭代法的算法思想

首先，我们假设方程 f(x)=0 在 x_0 处有解。可以将 f(x)在某一点 x_0 处进行泰勒级数展开，示例如下：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

下面取其线性部分，作为非线性方程 $f(x)=0$ 的一个近似方程，也就是上述泰勒级数展开的前面两项，示例如下：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x)=0$$

如果 $f(x_0)\neq 0$，那么上述方程的解为：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

这样，通过 x_0 得到了 x_1，然后再按照 x_1 进行下一次相似的计算。这样，便得到牛顿法的一个迭代序列公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

反复这个过程使得到的根逐渐逼近于真实根，直到满足精度为止。

2．牛顿迭代法的算法实现

我们可以根据前面所述的算法思想来编写相应的 Java 语言实现，详细的代码示例如下：

```
int NewtonMethod(double[] x,int maxcyc,double precision)
{
    double x0,x1;
```

```
int i;

x0=x[0];
 i=0;
 while(i<maxcyc)
{
     if(dfunc(x0)==0.0)                              //若通过初值，方法返回值为 0
     {
          System.out.print("迭代过程中导数为 0!\n");
          return 0;
     }
     x1=x0-func(x0)/dfunc(x0);                        //牛顿迭代计算
     if(Math.abs(x1-x0)<precision || Math.abs(func(x1))<precision)  //达到预设的结束条件
     {
          x[0]=x1;                                    //返回结果
          return 1;
     }
     else                                             //未达到结束条件
       {
          x0=x1;                                      //准备下一次迭代
       }
       i++;                                           //迭代次数累加
}
System.out.print("迭代次数超过预设值!仍没有达到精度！ \n");
return 0;
}
```

在这里，输入参数 x 为初始近似值，由于每次迭代之后都要对其进行修改，因此，这里才有了引用变量的形式。输入参数 maxcyc 为预设的最大迭代次数，输入参数 precision 为预设的精度，当小于该精度的时候便停止迭代。该方法的返回值如果为 1，则表示找到了结果，如果为 0 则表示没有找到结果。整个代码处理过程严格遵循了前面所述的算法，读者可以对照两者来加深理解。

另外，需要注意的一点是，这里的 func()方法为待求解的方程，而 dfunc()方法为待求解方程的导数方程。这两个方程都需要用户首先给出。

3．牛顿迭代法的算法应用

下面我们通过一个具体的例子来看一下牛顿迭代法求解非线性方程的应用。例如，对于如下的非线性方程：

$$x^4-3x^3+1.5x^2-4$$

我们来计算在 x_0=2.0 附近的方程的解。因此，首次迭代 x 的初始值为 2.0。我们根据牛顿迭代法来求解该方程的解，完整的程序代码示例如下：

【程序 6-28】

```
public class P6_28
{
     static double func(double x)                               //待求解方程
     {
          return x*x*x*x-3*x*x*x+1.5*x*x-4.0;
     }
     static double dfunc(double x)                              //导数方程
     {
          return 4*x*x*x-9*x*x+3*x;
     }
```

```
static int NewtonMethod(double[] x,int maxcyc,double precision)
{
    double x0,x1;
    int i;

    x0=x[0];
     i=0;
     while(i<maxcyc)
     {
        if(dfunc(x0)==0.0)                                        //若通过初值，方法返回值为 0
        {
            System.out.print("迭代过程中导数为 0!\n");
            return 0;
        }
        x1=x0-func(x0)/dfunc(x0);                                 //牛顿迭代计算
        if(Math.abs(x1-x0)<precision || Math.abs(func(x1))<precision)  //达到预设的结束条件
        {
            x[0]=x1;                                              //返回结果
            return 1;
        }
        else                                                      //未达到结束条件
          {
            x0=x1;                                                //准备下一次迭代
          }
          i++;                                                    //迭代次数累加
     }
     System.out.print("迭代次数超过预设值!仍没有达到精度！ \n");
     return 0;
}
public static void main(String[] args)
{
      double precision;
     int maxcyc,result;

      double[] x={2.0};                                     //初始值
      maxcyc=1000;                                                     //迭代次数
      precision=0.00001;                                        //精度
      result=NewtonMethod(x,maxcyc,precision);
     if(result==1)                                              //得到结果
      {
         System.out.printf("方程 x*x*x*x-3*x*x*x+1.5*x*x-4.0=0\n 在 2.0 附近的根为:%f\n",x[0]);
      }
     else                                                              //未得到结果
      {
         System.out.print("迭代失败!\n");
      }
  }
}
```

在该程序中，首先定义 func()方法作为待求解的方程，dfunc()方法作为 func()方法的导数方法。主方法中首先初始化待求解的近似值、迭代次数以及精度。然后，调用 NewtonMethod()方法求解方程。求解的结果保存在变量 x 中。该程序执行的结果，如图 6-31 所示。

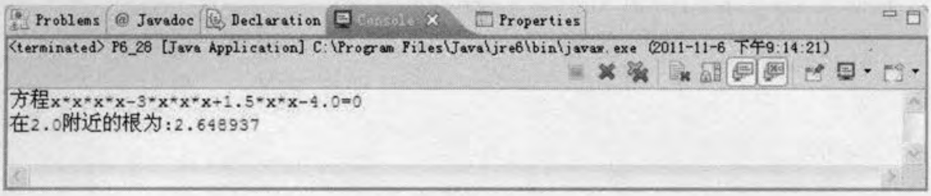


图 6-31　执行结果

6.9　小　　结

实际应用中的很多问题都可以归结为数学问题，因此算法的一个重要应用领域便是求解数学问题。本章对一些最常用的数学算法进行详细的分析，包括多项式的算法、随机数生成算法、复数运算的算法、阶乘算法、计算 π 近似值的算法、矩阵运算算法和方程求解的基本算法等。这些方面都是算法在数学中的基本应用，读者应该熟练掌握。

第 7 章　数据结构问题

数据结构是算法的核心，高效率的算法往往依赖于合理的数据结构。我们在前面章节中介绍了常用数据结构及其基本操作，本章将介绍一些经典的数据结构问题。通过这些问题，读者可以领略到合理选用数据结构所带来的方便。

7.1　动态数组排序

我们知道，在 C 语言中是不支持动态数组的。也就是说，我们在声明数组的时候，一定要明确指定数组的大小，不能将数组大小设置为未知数。但是很多时候数据量的大小未知，或者数据量的大小会随着问题而变化。这时候就需要一个长度大小能够变化的数组，这在程序中应该如何有效处理呢？

7.1.1　动态数组的存储和排序

对于上述问题，我们能够想到的一个最简单的方法便是申请一个非常大的数组，使其能够满足所有应用的需要。如果输入的数据量少，则只使用有效的部分。这种方法显然是非常笨的，浪费了大量的内存空间。

其实，一个很好的解决方法便是链表结构。也就是说，采用链式存储结构来保存数组。这样，程序在运行过程中，可以动态申请内存并增加链表的长度。这样就相当于增加了数组的长度，实现了动态数组。此后，便可以对该动态数组进行各种操作。

而对动态数组的排序，我们可以参照前面章节中介绍的各种排序算法。不过需要注意的是，这里排序的对象是链表，需要对排序算法进行适当的修改。

这样，根据上面的分析，我们便能够完成动态数组的排序算法，代码示例如下：

```
class LinkList                          //链表结构
{
    char data;                          //数据域
    LinkList next;                      //指针域
}
```

```
void DynamicSort(LinkList q)                //动态数组排序
{
    LinkList p=q;
    int i,j,k=0;
     char t;

    while(p!=null)
     {
          k++;
          p=p.next;
     }
    p=q;
    for(i=0;i<k-1;i++)
    {
         for(j=0;j<k-i-1;j++)
         {
                   if(p.data>p.next.data)
                   {
                        t=p.data;                       //交换数据
                        p.data=p.next.data;
                          p.next.data=t;
                    }
                    p=p.next;
         }
         p=q;
    }
}
```

这里，首先定义了一个链表结构的结点，其包括一个数据域（保存字符信息）和一个引用域（指向下一个数据结点）。该方法的输入参数 q 就为此类型的变量。程序中，采用了冒泡排序的思想，只不过针对链表结构进行了优化。方法 DynamicSort（）能够完成任意长度字符数组的排序。

7.1.2 动态数组排序实例

有了前面链表结构专门优化的排序算法之后，我们便可以完成动态数组排序问题。由于需要使用到链表，读者可以参阅前面章节中的介绍。这里，我们给出一个完整的例子，演示动态字符数组排序的过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 7-1】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.Scanner;

class LinkList                              //链表结构
{
    char data;                              //数据域
    LinkList next;                          //指针域
}

public class P8_1
 {
     static Scanner input=new Scanner(System.in);
     static char chc;
```

```
static LinkList CreatLinkList()                          //创建链表
{
     char ch;
     LinkList list=null;

     list=new LinkList();
     list.data=chc;
     list.next=null;
     return list;
}

static void insertList(LinkList list,char e)            //插入结点
{
      LinkList p;
     p=new LinkList();
     p.data=e;
     if(list==null)
      {
            list=p;
            p.next=null;
      }
     else
      {
          p.next=list.next;
          list.next=p;
      }
}

static void DynamicSort(LinkList q)                      //动态数组排序
{
     LinkList p=q;
     int i,j,k=0;
      char t;
     while(p!=null)
      {
            k++;
            p=p.next;
      }
     p=q;
     for(i=0;i<k-1;i++)
     {
          for(j=0;j<k-i-1;j++)
          {
                 if(p.data>p.next.data)
               {
                   t=p.data;                                  //交换数据
                   p.data=p.next.data;
                        p.next.data=t;
               }
               p=p.next;
          }
      p=q;
      }
 }
```

```
        public static void main(String[] args) throws IOException
        {
            int ch;
            LinkList    list,q;                          //声明链表

           System.out.printf("动态数组排序！ \n");
           System.out.printf("请输入一组字符，以 0 结束！ \n");
           BufferedReader reader = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
          ch = (char)reader.read();
          chc=(char)ch;                                 //输入链表的第一个数据
          q=list=CreatLinkList();                       //创建一个链表结点
          while(ch!='0'){
               ch = reader.read();
               if(ch!='0'){
               insertList(q,(char)ch) ;
               q=q.next;
               }
          }

           DynamicSort(list);                           //动态数组排序
            System.out.printf("\n");
            System.out.printf("对该数组排序之后，得到如下结果：\n");
           while(list!=null)
           {
                System.out.printf("%c ",list.data);     //输出排序后的数组内容
                list=list.next;
           }
            System.out.printf("\n");
        }
}
```

在该程序中，定义了链表结构的基本操作方法。由于我们这里只需要创建链表、插入结点等几个基本操作，因此，这里声明了几个程序中用到的最基本方法。方法 CreatLinkList()用于创建一个链表，并保存一个字符数据，方法 insertList()用于向链表尾部添加一个结点，方法 DynamicSort()就是基于冒泡思想的动态字符数组排序算法。

在主方法中，首先创建一个链表结点，然后由用户动态输入数据，接着对其进行排序，最后输出排序后的数组内容。执行该程序，输入一组字符以 0 结束，得到如下结果，如图 7-1 所示。

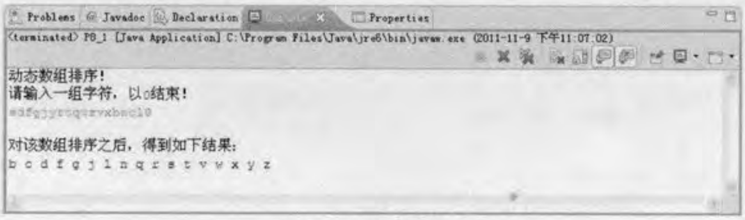


图 7-1　执行结果

7.2　约 瑟 夫 环

约瑟夫环问题起源于一个犹太故事。约瑟夫环问题的大意如下：

罗马人攻占了乔塔帕特，41 个人藏在一个山洞中躲过了这场浩劫。这 41 个人中，包括历史学家 Josephus（约瑟夫）和他的一个朋友。剩余的 39 个人为了表示不想罗马人屈服，决定集体自杀。大家决定了一个自杀方案，所有这 41 个人围成一个圆圈，由第 1 个人开始顺时针报数，每报数为 3 的人就立刻自杀，然由再由下一个人重新开始报数，仍然是每报数为 3 的人就立刻自杀，……，直到所有人都自杀身亡为止。

约瑟夫和他的朋友并不想自杀，于是约瑟夫想到了一个计策，他们两个同样参与到自杀方案中，但是最后却躲过了自杀。请问，他们是怎么做到的？

7.2.1　简单约瑟夫环算法

我们先来分析一下约瑟夫环问题。其实，约瑟夫和他的朋友要想躲过自杀，那么自杀到最后一轮应该剩下 3 个人，且约瑟夫和他的朋友应该位于 1 和 2 的位置。这样，第 3 个人自杀后，便只剩下约瑟夫和他的朋友两人。此时，已经没有其他人了，他们两个可以不遵守自杀规则而幸存下来。

一个明显的求解方法便是将 41 个人排成一个环，内圈为按照顺时针的最初编号，外圈为每个人数到数字 3 的顺序，如图 7-2 所示。我们可以使用数组来保存约瑟夫环中该自杀的数据，而数组的下标作为参与人员的编号，并将数组看作为环形来处理。

图 7-2　约瑟夫环

根据上面的思路，我们可以编写相应的约瑟夫环处理算法，示例代码如下：

```
static final int Num=41;                                    //总人数
static final int KillMan=3;                                 //自杀者报数

void Josephus(int alive)                                    //约瑟夫环算法
{
    int[] man=new int[Num];
    int count=1;
    int i=0,pos=-1;

    while(count<=Num)
    {
        do{
```

```
                pos=(pos+1) % Num;                    //环处理
                if(man[pos]==0)
                i++;
                if(i==KillMan)                        //该人自杀
                {
                    i=0;
                    break;
                }
            }while(true);
            man[pos]=count;
              System.out.printf("第%2d 个人自杀！约瑟夫环编号为%2d",pos+1,man[pos]);
              if(count%2==1)
              {
                   System.out.printf(" -> ");
              }
              else
              {
                   System.out.printf(" ->\n");      //输出换行
              }
            count++;
        }
        System.out.printf("\n");
        System.out.printf("这%d 需要存活的人初始位置应排在以下序号:\n",alive);
        alive=Num-alive;
        for(i=0;i<Num;i++)
         {
            if(man[i]>alive)
              {
                System.out.printf("初始编号:%d,约瑟夫环编号:%d\n",i+1,man[i]);
              }
         }
        System.out.printf("\n");
}
```

在这里，Num 为总人数，KillMan 为自杀者应该报的数字。程序中，首先进行环处理，对于报数字 KillMan 的则按照顺序自杀并显示。最后，根据要求存活的人数来输出其初始编号。

7.2.2 简单约瑟夫环求解

有了前面简单约瑟夫环求解算法之后，我们便可以求解约瑟夫和他的朋友应该排在什么位置才能躲过自杀。这里，我们给出一个完整的例子，显示整个求解过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 7-2】

```
import java.util.Scanner;
public class P8_2
{
     static final int Num=41;                              //总人数
     static final int KillMan=3;                           //自杀者报数

     static void Josephus(int alive)                       //约瑟夫环算法
     {
          int[] man=new int[Num];
          int count=1;
          int i=0,pos=-1;
          while(count<=Num)
```

```
{
    do{
        pos=(pos+1) % Num;                    //环处理
        if(man[pos]==0)
            i++;
        if(i==KillMan)                        //该人自杀
        {
            i=0;
            break;
        }
    }while(true);
    man[pos]=count;
      System.out.printf("第%2d 个人自杀！约瑟夫环编号为%2d",pos+1,man[pos]);
      if(count%2==1)
      {
          System.out.printf(" -> ");
      }
      else
      {
          System.out.printf(" ->\n");                   //输出换行
      }
    count++;
}
System.out.printf("\n");
System.out.printf("这%d 需要存活的人初始位置应排在以下序号:\n",alive);
alive=Num-alive;
for(i=0;i<Num;i++)
 {
    if(man[i]>alive)
     {
       System.out.printf("初始编号:%d,约瑟夫环编号:%d\n",i+1,man[i]);
     }
 }
System.out.printf("\n");
}
public static void main(String[] args)
{
    int alive;
    Scanner input=new Scanner(System.in);
   System.out.printf("约瑟夫环问题求解!\n");
    System.out.printf("输入需要留存的人的数量:");
   alive=input.nextInt();                         //输入留存的人的数量
    Josephus(alive);
}
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入需要留存的人的数量，然后调用 Josephus()方法来求解。求解的过程中，按照顺序显示自杀的顺序，以及最后留存的人应该排的编号。

执行该程序，得到如下结果，如图 7-3 所示。从以下结果可以看出，约瑟夫和他的朋友应该排在 16 号和 31 号才能够躲过自杀而存活下来。

我们这里演示了 41 个人，报数为 3 的自杀情况，读者也可以将上述算法推广，计算 n 个人，报数为 m 的自杀的情况，看看存活的人应该排在什么位置。

图 7-3 执行结果

7.2.3 复杂约瑟夫环算法

在历史上，约瑟夫环被广泛研究。一个推广的约瑟夫环问题如下：

有 n 个人环坐一圈，按照顺时针方向依次编号为 1、2、3、……、n。有一个黑盒子中放置着许多纸条，其上随机写有数字。每个人随机取一个纸条，纸条上的数字为出列数字。游戏开始时，任选一个处理数字 m。从第一个人开始，按编号顺序自 1 开始顺序报数，报到 m 的人出列，同时将其手中的数字作为新的出列数字。然后，从下一个人开始重新从 1 报数，如此循环报数下去。问最后剩下哪个人？

我们先来分析一下这个问题，同前面的约瑟夫环相比，这里要明显复杂些，主要体现在如下几点：

- 这里，参与人的个数为 n 是一个可变量，因此，不能使用数组来表示，应该使用链表结构来表示。另外，这 n 个人首尾相接构成一个环，因此应该使用循环链表来处理这个问题。
- 约瑟夫环的出列数字不是固定值，而是每个人具有不同的值。这就要在程序中分别处理。

其他部分和前述的约瑟夫环处理是类似的。我们可以参照这里的分析和前述的算法方法来编写这个复杂约瑟夫环的求解算法。算法的示例代码如下：

```
class  LinkList2                    //节点类
{
   int  no ;                        //序列
   int  psw;
   LinkList2 next;                  //下一个节点
}
void CircleFun(LinkList2 list, int m)                    //算法
{
    LinkList2 p ,q;
    int i;
```

```
        q = p = list ;
        while(q.next != p)
         {
              q=q.next;
         }
        System.out.printf("游戏者按照如下的顺序出列。\n") ;
        while(p.next != p)
         {
              for(i=0;i<m-1;i++)
              {
                   q = p;
                   p = p.next;
              }
              q.next = p.next;                        //删除 p 指向的结点
              System.out.printf("第%d 个人出列，其手中的出列数字为%d。\n",p.no,p.psw );
              m = p.psw;                              //重置出列数字
              p=null;
              p = q.next;
         }
        System.out.printf("\n 最后一个人是%d，其手中的出列数字为%d。",p.no,p.psw);
    }
```

这里，定义了链表结构来保存数据。链表中每个结点包括如下三个域：

- 域 no：用于保存游戏者编号。
- 域 psw：用于保存游戏者的出列数字。
- 域 next：引用域，用于保存下一个结点的引用。

程序中，按照约瑟夫环的规则来处理，依次输出出列的人及出列数字，直到最后一个。最后，便得到剩余的是哪一个人。

7.2.4　复杂约瑟夫环求解

有了前面复杂约瑟夫环求解算法之后，我们便可以求解前述约瑟夫环问题，得到最后剩余的是哪一个人。这里，我们给出一个完整的例子，显示整个求解过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 7-3】

```
import java.util.Scanner;
class   LinkList2                         //节点类
{
    int   no ;                            //序列
    int psw;
    LinkList2 next;                      //下一个节点

    public LinkList2(int no,int psw)
    {
        this.no=no;
        this.psw=psw;
     }

   public LinkList2(int no,int psw,LinkList2 next)      //构造方法
   {
    this.no=no;
    this.psw=psw;
    this.next=next;
   }
```

```
    }

    public class P8_3 {
        static   LinkList2 head=null,tail=null;          // 头指针，尾指针
        int size=0;

       public void addhead(int i,int psw)
        {
        head=new LinkList2(i,psw,head);
            if (tail == null)
                tail = head;
            size++;
       }

      public void addtail(int i,int psw)
      {
            tail.next = new LinkList2(i,psw);
          tail = tail.next;
          tail.next=head;
          size++;
      }

      static   void CircleFun(LinkList2 list, int m)                    //算法
         {
            LinkList2 p ,q;
            int i;
            q = p = list ;
            while(q.next != p)
             {
                  q=q.next;
             }
            System.out.printf("游戏者按照如下的顺序出列。\n") ;
            while(p.next != p)
             {
                  for(i=0;i<m-1;i++)
                  {
                       q = p;
                       p = p.next;
                  }
                  q.next = p.next;                         //删除 p 指向的结点
                  System.out.printf("第%d 个人出列，其手中的出列数字为%d。\n",p.no,p.psw );
                  m = p.psw;                               //重置出列数字
                  p=null;
                  p = q.next;
             }
            System.out.printf("\n 最后一个人是%d，其手中的出列数字为%d。",p.no,p.psw);
        }
        public static void main(String[] args)
        {
              P8_3 LL=new P8_3();
              int e,baoshu;
              System.out.printf("约瑟夫环问题求解！ \n");
              System.out.printf("请输入约瑟夫环中的人数：\n");
              Scanner input=new Scanner(System.in);
              int   num=input.nextInt();                    //输入约瑟夫环的人数
```

```
            System.out.printf("按照顺序输入每个人手中的出列数字：\n");
            e=input.nextInt();

            LL.addhead(1,e);

            for (int i=2; i<=num;i++ )                           //构造循环链表
            {
                    e=input.nextInt();
                   LL.addtail(i,e);
            }

            System.out.printf("请输入第一次出列的数字：\n");
            baoshu=input.nextInt();
            CircleFun(head,baoshu) ;                              //求解约瑟夫环
            System.out.printf("\n");
    }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入约瑟夫环中的人数，然后依次输入每个人手中的出列数字，从而创建循环链表。接着，由用户输入初始的出列数字。然后，调用 CircleFun()方法进行求解。求解的过程中，按照顺序显示了出列者的顺序，以及最后剩余的人。

执行该程序，得到如下结果，如图 7-4 所示。这里输入约瑟夫环中的人数为 8，每个人手中的出列数字为 3、5、6、2、1、5、7、2，初始的出列数字为 4。那么，游戏者将按照如下顺序出列：

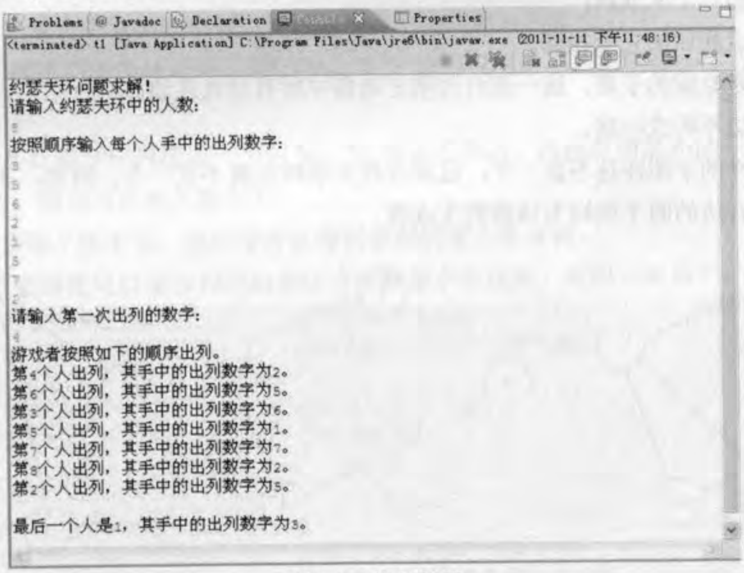


图 7-4　执行结果

（1）第 4 个人首先出列，其手中的出列数字为 2；

（2）第 6 个人接着出列，其手中的出列数字为 5；

（3）第 3 个人接着出列，其手中的出列数字为 6；

（4）第 5 个人接着出列，其手中的出列数字为 1；

（5）第 7 个人接着出列，其手中的出列数字为 7；

（6）第 8 个人接着出列，其手中的出列数字为 2；

（7）第 2 个人接着出列，其手中的出列数字为 5；

（8）最后，只剩下一个人，其编号为 1，手中的出列数字为 3。

这样，我们便找到了剩余的人。读者可以输入不同的数据来执行该程序，这是一个非常有意思的游戏，适合于多人一块玩。

7.3 城市之间的最短总距离

求解城市之间的最短总距离是一个非常实际的问题，其大意如下：

某个地区有 n 个城市，如何选择一条路线使各个城市之间的总距离最短？

7.3.1 最短总距离算法

我们先来分析一下这个问题。某个地区的 n 个城市构成一个交通图，我们可以使用图结构来描述这个问题，其对应关系如下：

- 每个城市代表一个图中的一个顶点。
- 两个顶点之间的边就是两个城市之间的路径，边的权值代表了城市间的距离。

这样，求解各个城市之间的最短总距离问题就归结为该图的最小生成树问题。

我们这里来看一下什么是生成树和最小生成树。对于一个连通图的一个子图，如果其满足如下条件则称为原图的一个生成树：

- 子图的顶点和原图完全相同。
- 子图的分是原图的子集，这一部分边刚好将图中所有顶点连通。
- 子图中的边不构成回路。

满足上述条件的子图往往不止一个，这就导致生成树也就不止一个。例如，在图 7-5 中，左图为一个无向图，右边的两个图均为该图的生成树。

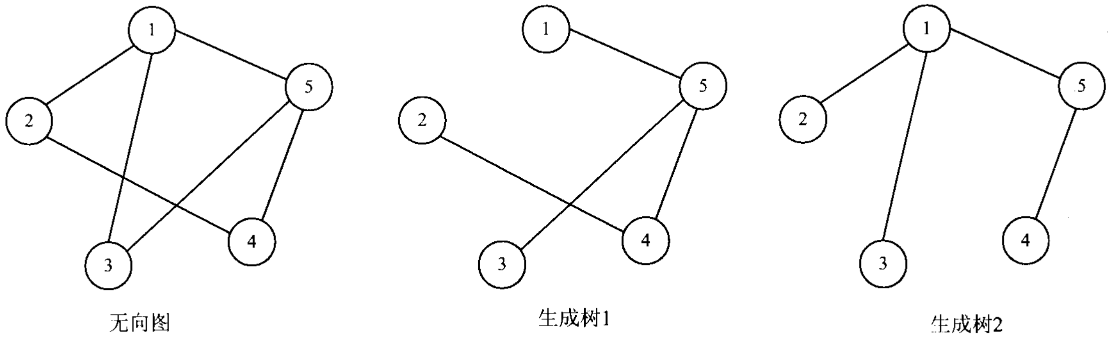


图 7-5　图的生成树

理论上可以证明，对于有 n 个顶点的连通图，其生成树有且只有有 n-1 条边。如果边数少于此数就不可能将各顶点连通，如果边接边的数量多于 n-1，则必须要产生回路。

在实际应用中的问题往往归结为带权无向图，例如前述的交通图。对于一个带权连通图，生成树不同，树中各边上的权值总和也不同，权值最小的生成树就称为图的最小生成树。例如，图 7-6 所示的带权无向图，其有两个生成树方案：

- 方案一：权值总和为 3+2+4+5=14；
- 方案二：权值总和为 3+2+2+5=12；

这里，方案二的权值和小于方案一的权值和，因此，方案二为最小生成树。

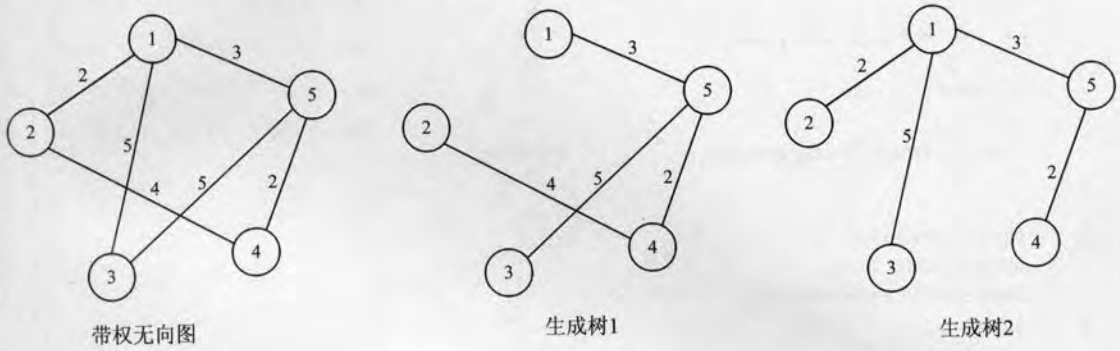


图 7-6　带权无向图的生成树

在图论中求解最小生成树，我们可以采用如下算法：

（1）将图中所有顶点的集合记为 V，最小生成树中的顶点集合为 U。初始时，V 中包含所有顶点，而 U 为空集。

（2）首先从 V 集合中取出一个顶点（设为 V_0），将其加入到集合 U 中。

（3）从 V_0 的邻接点中选择点 V_n，使（V_0，V_n）边的权值最小，得到最小生成树中的一条边。将 V_n 点加入集合 U。

（4）接着从 V-U 集合中再选出一个与 V_0、V_n 邻接的顶点，找出权值最小的一条边，得到最小生成树的另一条边。将该顶点加入集合 U。

（5）按上述步骤不断重复，最后便可以得到该图的最小生成树。

我们按照这个思路便可以编写相应的算法来求解最小生成树。代码示例如下：

```
static final int   MaxNum=20;                    //图的最大顶点数
static final int   MaxValue=65535;               //最大值(可设为一个最大整数)

static final int   USED=0;                       //已选用顶点
static final int   NoL=-1;                       //非邻接顶点

class GraphMatrix
{     static final int   MaxNum=20;
    char[] Vertex=new char[MaxNum];              //保存顶点信息(序号或字母)
    int GType;                                        //图的类型(0:无向图，1:有向图)
    int VertexNum;                                    //顶点的数量
    int EdgeNum;                                      //边的数量
    int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];       //保存边的权
    int[] isTrav=new int[MaxNum];                     //遍历标志
}                                                     //定义邻接矩阵图结构
void PrimGraph(GraphMatrix GM)                        //最小生成树算法
{
    int i,j,k,min,sum;
    int[] weight=new int[GraphMatrix.MaxNum];         //权值
    char[] vtempx=new char[GraphMatrix.MaxNum]; //临时顶点信息
```

```
     sum=0;
    for(i=1;i<GM.VertexNum;i++)                        //保存邻接矩阵中的一行数据
    {
        weight[i]=GM.EdgeWeight[0][i];
        if(weight[i]==MaxValue)
          {
            vtempx[i]=(char)NoL;
          }
        else
          {
            vtempx[i]=GM.Vertex[0];                    //邻接顶点
          }
    }
    vtempx[0]=USED;                                    //选用
    weight[0]=MaxValue;
    for(i=1;i<GM.VertexNum;i++)
    {
        min=weight[0];                                 //最小权值
        k=i;
        for(j=1;j<GM.VertexNum;j++)
          {
            if(weight[j]<min && vtempx[j]>0)           //找到具有更小权值的未使用边
            {
                min=weight[j];                 /       /保存权值
                k=j;                                   //保存邻接点序号
            }
          }
        sum+=min;                                      //权值累加
        System.out.printf("(%c,%c),",vtempx[k],GM.Vertex[k]); //输出生成树一条边
        vtempx[k]=USED;                                //选用
        weight[k]=MaxValue;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                    //重新选择最小边
          {
            if(GM.EdgeWeight[k][j]<weight[j] && vtempx[j]!=0)
            {
                weight[j]=GM.EdgeWeight[k][j]; //权值
                vtempx[j]=GM.Vertex[k];
            }
          }
    }
    System.out.printf("\n 最小生成树的总权值为:%d\n",sum);
}
```

这里，定义了图的最大顶点数 MaxNum 和用于保存特殊符号“Z”的最大值 MaxValue。USED 表示已选用的顶点，NoL 表示非邻接顶点。

邻接矩阵图结构为 GraphMatrix，其中包括保存顶点信息的数组 Vertex，图的类型 GType、顶点的数量 VertexNum、边的数量 EdgeNum、保存边的权的二维数组 EdgeWeight 以及遍历标志数组 isTrav。

方法 PrimGraph()便是最小生成树算法，其输入参数 GM 为 GraphMatrix 结构的图数据。程序中严格遵循了前述求解最小生成树的算法，读者可以对照以加深理解。

7.3.2 最短总距离求解

有了前述图的最小生成树算法后，我们便可以求解城市之间最短总距离问题。假设一个地区共

有 5 个城市，如图 7-7 所示。各个城市之间道路的距离如下：

- 城市 1 和城市 2 之间 2km；
- 城市 1 和城市 3 之间 5km；
- 城市 1 和城市 5 之间 3km；
- 城市 2 和城市 4 之间 4km；
- 城市 3 和城市 5 之间 5km；
- 城市 4 和城市 5 之间 2km。

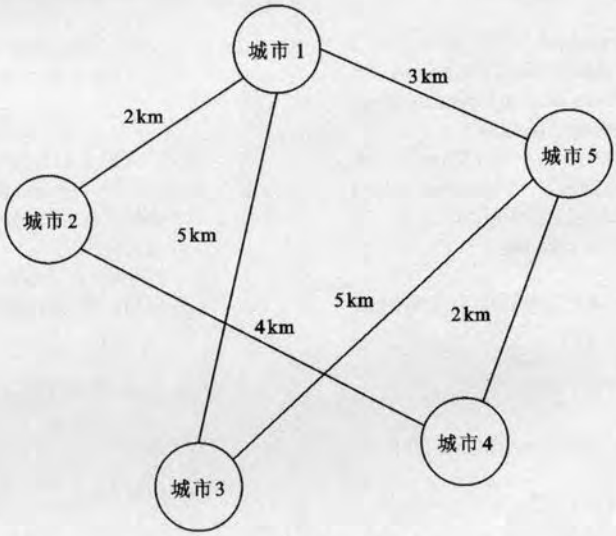


图 7-7 城市间的交通图

下面我们通过前述的求解最小生成树的算法来求解城市间的最短总距离。完整的程序代码示例如下：

【程序 7-4】

```
import java.util.Scanner;
class GraphMatrix
{    static final int  MaxNum=20;
     char[] Vertex=new char[MaxNum];                    //保存顶点信息(序号或字母)
     int GType;                                         //图的类型(0:无向图，1:有向图)
     int VertexNum;                                     //顶点的数量
     int EdgeNum;                                       //边的数量
     int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];        //保存边的权
     int[] isTrav=new int[MaxNum];                      //遍历标志
}                                                       //定义邻接矩阵图结构

public class P8_4
{
     static final int  MaxValue=65535;                  //最大值(可设为一个最大整数)
     static final int  USED=0;                          //已选用顶点
     static final int  NoL=-1;
     static Scanner input=new Scanner(System.in);
     static void CreateGraph(GraphMatrix GM)            //创建邻接矩阵图
     {
          int i,j,k;
```

```
        int weight;                                          //权
        char EstartV,EendV;                                  //边的起始顶点

        System.out.printf("输入图中各顶点信息\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                          //输入顶点
        {
            System.out.printf("第%d 个顶点:",i+1);
            GM.Vertex[i]=(input.next().toCharArray())[0];    //保存到各顶点数组元素中
        }
        System.out.printf("输入构成各边的顶点及权值:\n");
        for(k=0;k<GM.EdgeNum;k++)                            //输入边的信息
        {
            System.out.printf("第%d 条边: ",k+1);
            EstartV=input.next().charAt(0);
            EendV=input.next().charAt(0);
            weight=input.nextInt();
            for(i=0;EstartV!=GM.Vertex[i];i++);              //在已有顶点中查找始点
            for(j=0;EendV!=GM.Vertex[j];j++);                //在已有顶点中查找结终点
            GM.EdgeWeight[i][j]=weight;                      //对应位置保存权值，表示有一条边
            if(GM.GType==0)                                  //若是无向图
            {
                GM.EdgeWeight[j][i]=weight;                  //在对角位置保存权值
            }
        }
    }

    static void ClearGraph(GraphMatrix GM)
    {
        int i,j;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                          //清空矩阵
        {
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                GM.EdgeWeight[i][j]=MaxValue;                //设置矩阵中各元素的值为 MaxValue
            }
        }
    }

    static void OutGraph(GraphMatrix GM)                     //输出邻接矩阵
    {
        int i,j;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
        {
            System.out.printf("\t%c",GM.Vertex[j]);          //在第 1 行输出顶点信息
        }
        System.out.printf("\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            System.out.printf("%c",GM.Vertex[i]);
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                if(GM.EdgeWeight[i][j]==MaxValue)            //若权值为最大值
                {
                    System.out.printf("\tZ");                //以 Z 表示无穷大
                }
```

```
            else
            {
                System.out.printf("\t%d",GM.EdgeWeight[i][j]); //输出边的权值
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }
}

static void PrimGraph(GraphMatrix GM)                          //最小生成树算法
{
    int i,j,k,min,sum;
    int[] weight=new int[GraphMatrix.MaxNum];                  //权值
    char[] vtempx=new char[GraphMatrix.MaxNum];                //临时顶点信息
    sum=0;
    for(i=1;i<GM.VertexNum;i++)                                //保存邻接矩阵中的一行数据
    {
        weight[i]=GM.EdgeWeight[0][i];
        if(weight[i]==MaxValue)
        {
            vtempx[i]=(char)NoL;
        }
        else
        {
            vtempx[i]=GM.Vertex[0];                            //邻接顶点
        }
    }
    vtempx[0]=USED;                                            //选用
    weight[0]=MaxValue;
    for(i=1;i<GM.VertexNum;i++)
    {
        min=weight[0];                                         //最小权值
        k=i;
        for(j=1;j<GM.VertexNum;j++)
        {
            if(weight[j]<min && vtempx[j]>0)                   //找到具有更小权值的未使用边
            {
                min=weight[j];                                 //保存权值
                k=j;                                           //保存邻接点序号
            }
        }
        sum+=min;                                              //权值累加
        System.out.printf("(%c,%c),",vtempx[k],GM.Vertex[k]);  //输出生成树一条边
        vtempx[k]=USED;                                        //选用
        weight[k]=MaxValue;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                            //重新选择最小边
        {
            if(GM.EdgeWeight[k][j]<weight[j] && vtempx[j]!=0)
            {
                weight[j]=GM.EdgeWeight[k][j];                 //权值
                vtempx[j]=GM.Vertex[k];
            }
        }
    }
    System.out.printf("\n 最小生成树的总权值为:%d\n",sum);
}
```

```
        public static void main(String[] args)
        {
            GraphMatrix GM=new GraphMatrix();                   //定义保存邻接表结构的图
            char again;
            String go;
            System.out.printf("寻找最小生成树！\n");
            do{
                System.out.printf("请先输入输入生成图的类型:");
                GM.GType=input.nextInt();   //图的种类
                System.out.printf("输入图的顶点数量:");
                GM.VertexNum=input.nextInt();                   //输入图顶点数
                System.out.printf("输入图的边数量:");
                GM.EdgeNum=input.nextInt();                     //输入图边数
                ClearGraph(GM);                                 //清空图
                CreateGraph(GM);                                //生成邻接表结构的图

                System.out.printf("最小生成树的边为:");
                PrimGraph(GM);

                System.out.print("\n 继续玩吗(y/n)?");
                go=input.next();
            }while(go.equalsIgnoreCase("y"));

            System.out.printf("游戏结束！\n");
        }
}
```

这里，图的处理部分参照了前面章节中关于图结构的算法。在主方法中，首先由用户输入图的种类，0 表示无向图，1 表示有向图。然后，由用户输入顶点数和边数。接着清空图，并按照用户输入的数据生成邻接表结构的图。最后，调用 PrimGraph()方法求解最小生成树。

整个程序执行的结果，如图 7-8 所示。这里按照题目的要求输入，这是一个无向图，包含 4 个顶点和 6 条边，将各个城市之间道路的距离作为权值输入。

图 7-8 执行结果

最终计算得到的最小生成树为（1，2)、(1，5)、(5，4)、(1，3)，总权值为 12。也就是说，这五个城市之间的最短总距离为 12km，最短路径为图 7-9 中实线部分。

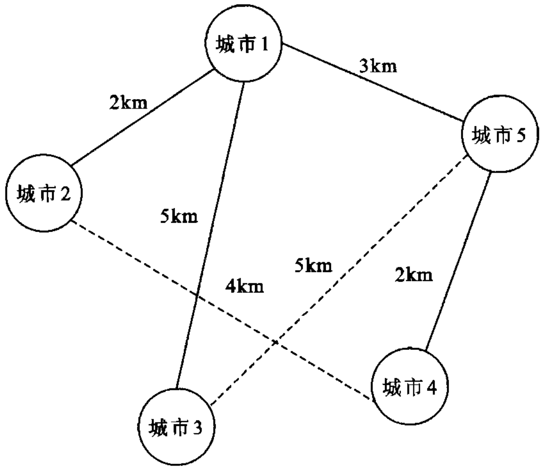


图 7-9　最短总路径

7.4 最短路径

求解城市之间的最短距离是一个非常实际的问题，其大意如下：

某个地区有 n 个城市，如何选择路线使某个城市到某个指定城市的距离最短？

注意：这里需要求解的最短路径指的是两个城市之间的最短距离，而不是前面一节所讲的所有城市之间最短总距离。

7.4.1 最短路径算法

我们先来分析一下这个问题。某个地区的 n 个城市构成一个交通图，仿照前面一节，这里我们仍然可以使用图结构来描述这个问题，其对应关系如下：

- 每个城市代表一个图中的一个顶点。
- 两个顶点之间的边就是两个城市之间的路径，边的权值代表了城市间的距离。

这样，求解两个城市之间的最短距离问题就归结为该图的最小路径问题。

对于一个带权图，一条路径的起始顶点往往称为源点，最后一个顶点为终点。对于图 7-10 所示的带权无向图，我们来看看每个顶点到顶点 V_1 的最短路径。

- 对于 V_2 到 V_1，两者之间的最短路径就是两者之间的边，路径权值为 2；
- 对于 V_3 到 V_1，两者之间的最短路径就是两者之间的边，路径权值为 5；
- 对于 V_4 到 V_1，两者之间没有边，可以经过顶点 2 然后到达顶点 1，此时路径权值为 2+4=6；也可以经过顶点 5 然后到达顶点 1，此时路径权值为 2+3=5。因此，最短路径为经过顶点 5 然后到达顶点 1，路径权值为 5；
- 对于 V_5 到 V_1，两者之间的最短路径就是两者之间的边，路径权值为 3；

在图论中求解最短路径，我们可以采用如下算法：

（1）将图中所有顶点的集合记为 V，最小生成树中的顶点集合为 U。初始时，V 中包含所有顶点，而 U 中只有一个顶点 V_0。

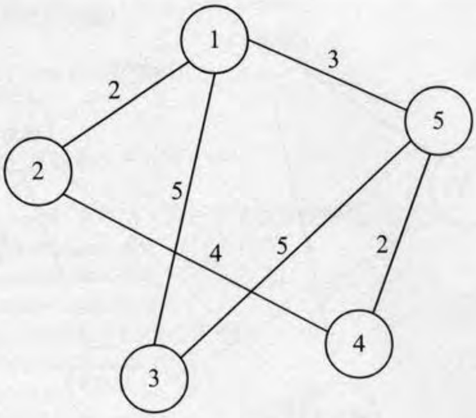


图 7-10　图的最短路径

（2）然后，计算下一个顶点到顶点 V_0 的最短路径，并将该顶点加入集合 U 中。

（3）按上述步骤不断重复，直到全部顶点都加入集合 U，这样便得到每个顶点到达顶点 V_0 的最短路径。

我们按照这个思路便可以编写相应的算法来求解最短路径。代码示例如下：

```
class GraphMatrix2
{    static final int   MaxNum=20;
     char[] Vertex=new char[MaxNum];                    //保存顶点信息(序号或字母)
     int GType;                                         //图的类型(0:无向图，1:有向图)
     int VertexNum;                                     //顶点的数量
     int EdgeNum;                                       //边的数量
     int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];                  //保存边的权
     int[] isTrav=new int[MaxNum];                                //遍历标志
}

static int[] path=new int[GraphMatrix2.MaxNum];                   //两点经过的顶点集合的数组
static int[] tmpvertex=new int[GraphMatrix2.MaxNum];              //最短路径的起始点集合

void DistMin(GraphMatrix2 GM,int vend)                            //最短路径算法
{
     int[] weight=new int[GraphMatrix2.MaxNum];                   //某终止点到各顶点的最短路径长度
     int i,j,k,min;

     vend--;

     for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                        //初始 weight 数组
     {
          weight[i]=GM.EdgeWeight[vend][i];             //保存最小权值
     }
     for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                        //初始 path 数组
     {
          if(weight[i]<MaxValue && weight[i]>0)         //有效权值
            {
               path[i]=vend;                            //保存边
            }
     }
```

```
    for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                    //初始 tmpvertex 数组
    {
        tmpvertex[i]=0;                            //初始化顶点集合为空
    }

    tmpvertex[vend]=1;                             //选入顶点 vend
    weight[vend]=0;
    for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
    {
        min=MaxValue;
        k=vend;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                //查找未用顶点的最小权值
          {
            if(tmpvertex[j]==0 && weight[j]<min)
            {
                min=weight[j];
                k=j;
            }
          }
        tmpvertex[k]=1;                            //将顶点 k 选入
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                //以顶点 k 为中间点，重新计算权值
          {
            if(tmpvertex[j]==0 && weight[k]+GM.EdgeWeight[k][j]<weight[j])
            {
                weight[j]=weight[k]+GM.EdgeWeight[k][j];
                path[j]=k;
            }
          }
    }
}
```

这里，定义了图的最大顶点数 MaxNum 和用于保存特殊符号“Z”的最大值 MaxValue。数组 path 用于保存两点经过的顶点集合的数组，数组 tmpvertex 用于保存最短路径的起始点集合。

邻接矩阵图结构为 GraphMatrix，其中包括保存顶点信息的数组 Vertex，图的类型 GType、顶点的数量 VertexNum、边的数量 EdgeNum、保存边的权的二维数组 EdgeWeight 以及遍历标志数组 isTrav。

方法 DistMin()便是最短路径算法，其输入参数 GM 为 GraphMatrix 结构的图数据，输入参数 vend 为指定的终止点编号。程序中严格遵循了前述求解最短路径的算法，读者可以对照以加深理解。

7.4.2 最短路径求解

有了前述图的最短路径算法后，我们便可以求解两个城市之间的最短距离问题。假设一个地区共有 5 个城市，如图 7-11 所示。各个城市之间道路的距离如下：

- 城市 1 和城市 2 之间 2km；
- 城市 1 和城市 3 之间 5km；
- 城市 1 和城市 5 之间 3km；
- 城市 2 和城市 4 之间 4km；
- 城市 3 和城市 5 之间 5km；
- 城市 4 和城市 5 之间 2km。

下面我们通过前述的图论求解最短路径的算法来求解各个城市到城市 1 之间的最短距离。完整的程序代码示例如下：

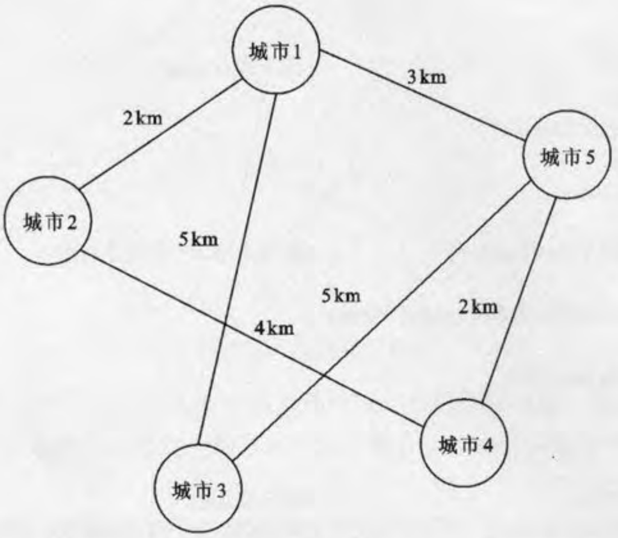


图 7-11　城市间的交通图

【程序 7-5】

```
import java.util.Scanner;

class GraphMatrix2
{    static final int   MaxNum=20;
    char[] Vertex=new char[MaxNum];                          //保存顶点信息(序号或字母)
    int GType;                                               //图的类型(0:无向图，1:有向图)
    int VertexNum;                                           //顶点的数量
    int EdgeNum;                                             //边的数量
    int[][] EdgeWeight=new int[MaxNum][MaxNum];              //保存边的权
    int[] isTrav=new int[MaxNum];                            //遍历标志
}

public class P8_5
{
     static final int   MaxValue=65535;                      //最大值(可设为一个最大整数)
     static int[] path=new int[GraphMatrix2.MaxNum];         //两点经过的顶点集合的数组
     static int[] tmpvertex=new int[GraphMatrix2.MaxNum];    //最短路径的起始点集合
     static Scanner input=new Scanner(System.in);
     static void CreateGraph(GraphMatrix2 GM)                //创建邻接矩阵图
     {
          int i,j,k;
           int weight;                                       //权
          char EstartV,EendV;                                //边的起始顶点

          System.out.printf("输入图中各顶点信息\n");
          for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                        //输入顶点
          {
               System.out.printf("第%d 个顶点:",i+1);
```

```
            GM.Vertex[i]=(input.next().toCharArray())[0];       //保存到各顶点数组元素中
        }
        System.out.printf("输入构成各边的顶点及权值:\n");
        for(k=0;k<GM.EdgeNum;k++)                               //输入边的信息
        {
            System.out.printf("第%d 条边: ",k+1);
            EstartV=input.next().charAt(0);
            EendV=input.next().charAt(0);
            weight=input.nextInt();
            for(i=0;EstartV!=GM.Vertex[i];i++);                 //在已有顶点中查找始点
            for(j=0;EendV!=GM.Vertex[j];j++);                   //在已有顶点中查找结终点
            GM.EdgeWeight[i][j]=weight;                         //对应位置保存权值，表示有一条边
            if(GM.GType==0)                                     //若是无向图
              {
                GM.EdgeWeight[j][i]=weight;                     //在对角位置保存权值
              }
        }
    }

    static void ClearGraph(GraphMatrix2 GM)
    {
        int i,j;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                             //清空矩阵
        {
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
              {
                GM.EdgeWeight[i][j]=MaxValue;                   //设置矩阵中各元素的值为 MaxValue
              }
        }
    }

    static void OutGraph(GraphMatrix2 GM)                       //输出邻接矩阵
    {
        int i,j;
        for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
         {
            System.out.printf("\t%c",GM.Vertex[j]);             //在第 1 行输出顶点信息
         }
        System.out.printf("\n");
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            System.out.printf("%c",GM.Vertex[i]);
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)
            {
                if(GM.EdgeWeight[i][j]==MaxValue)               //若权值为最大值
                  {
                   System.out.printf("\tZ");                    //以 Z 表示无穷大
                  }
                else
                  {
                   System.out.printf("\t%d",GM.EdgeWeight[i][j]); //输出边的权值
                  }
            }
            System.out.printf("\n");
```

```
        }
    }

    static void DistMin(GraphMatrix2 GM,int vend)                    //最短路径算法
    {

    nt[] weight=new int[GraphMatrix2.MaxNum];                        //某终止点到各顶点的最短路径长度
        int i,j,k,min;
        vend--;

        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                                  //初始 weight 数组
        {
            weight[i]=GM.EdgeWeight[vend][i];                        //保存最小权值
        }
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                                  //初始 path 数组
        {
            if(weight[i]<MaxValue && weight[i]>0)                    //有效权值
              {
                path[i]=vend;                                        //保存边
              }
        }
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                                  //初始 tmpvertex 数组
        {
            tmpvertex[i]=0;                                          //初始化顶点集合为空
        }

        tmpvertex[vend]=1;                                           //选入顶点 vend
        weight[vend]=0;
        for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)
        {
            min=MaxValue;
            k=vend;
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                              //查找未用顶点的最小权值
              {
                if(tmpvertex[j]==0 && weight[j]<min)
                {
                    min=weight[j];
                    k=j;
                }
              }
            tmpvertex[k]=1;                                          //将顶点 k 选入
            for(j=0;j<GM.VertexNum;j++)                              //以顶点 k 为中间点，重新计算权值
              {
                if(tmpvertex[j]==0 && weight[k]+GM.EdgeWeight[k][j]<weight[j])
                {
                    weight[j]=weight[k]+GM.EdgeWeight[k][j];
                    path[j]=k;
                }
              }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
  {
        GraphMatrix2 GM=new GraphMatrix2();                          //定义保存邻接表结构的图
```

```
            String go;
            int vend;
            int i,k;

            System.out.printf("求解最短路径问题！ \n");
            do{
            System.out.printf("请先输入输入生成图的类型:");
                GM.GType=input.nextInt();                    //图的种类
                System.out.printf("输入图的顶点数量:");
                GM.VertexNum=input.nextInt();                //输入图顶点数
                System.out.printf("输入图的边数量:");
                GM.EdgeNum=input.nextInt();                  //输入图边数
                ClearGraph(GM);                              //清空图
                CreateGraph(GM);                             //生成邻接表结构的图

                System.out.printf("\n 请输入结束点:");
                vend=input.nextInt();

               DistMin(GM,vend);

                vend--;
                System.out.printf("\n 各顶点到达顶点%c 的最短路径分别为(起始点 - 结束
点):\n",GM.Vertex[vend]);
                for(i=0;i<GM.VertexNum;i++)                  //输出结果
                {
                    if(tmpvertex[i]==1)
                    {
                        k=i;
                        while(k!=vend)
                        {
                            System.out.printf("顶点%c - ",GM.Vertex[k]);
                            k=path[k];
                        }
                        System.out.printf("顶点%c\n",GM.Vertex[k]);
                    }
                    else
                    {
                System.out.printf("%c - %c:无路径\n",GM.Vertex[i],GM.Vertex[vend]);
                    }
                }

             System.out.print("\n 继续玩吗(y/n)?");
             go=input.next();
            }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
            System.out.printf("游戏结束！ \n");
        }
    }
```

这里，图的处理部分参照了前面章节中关于图结构的算法。在主方法中，首先由用户输入图的种类，0 表示无向图，1 表示有向图。然后，由用户输入顶点数和边数。接着清空图，并按照用户输入的数据生成邻接表结构的图。此时，由用户输入一个指定的结束点，然后调用 DistMin()方法来求解各个顶点到达该指定结束点的最短路径。最后，将计算得到的最短路径结果输出显示。

整个程序执行的结果，如图 7-12 所示。这里按照题目的要求输入，这是一个无向图，包含 4 个顶点和 6 条边，将各个城市之间道路的距离作为权值输入。从图中的结果可知，各个城市到达城市

1 的最短距离分别为：

- 城市 2 到城市 1 的最短距离为 2km，直接到达；
- 城市 3 到城市 1 的最短距离为 5km，直接到达；
- 城市 4 到城市 1 的最短距离为 5km，中间经过城市 5；
- 城市 5 到城市 1 的最短距离为 3km，直接到达。

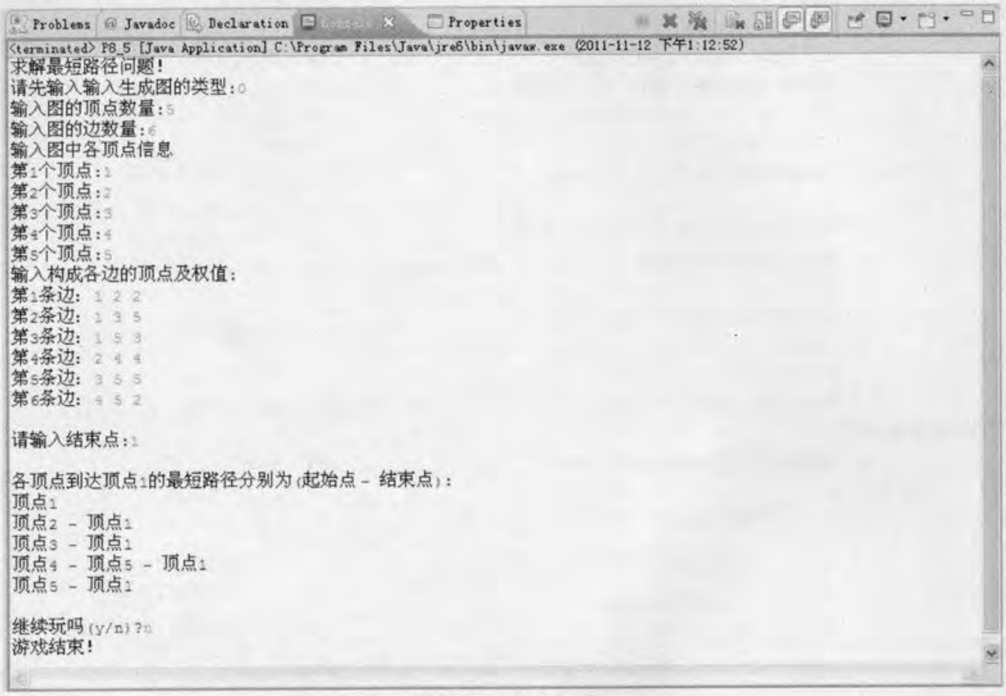


图 7-12　执行结果

7.5　括 号 匹 配

括号匹配是程序设计中一个最基本的问题。例如，在 Java 语言中，for 循环语言中的循环体需要用一对花括号“{}”括起来，示例如下：

```
for(i=0;i<num;i++)
{
    //循环体语句
}
```

类似的还有 if 语句，switch 语句等复合语句以及自定义函数。

我们在 C 语言的编译环境中输入代码的时候，要求括号需要成对儿出现，否则，编译的时候将提示出错信息。例如：

```
for(i=0;i<num;i++)
{
                                    //循环体语句
    if(j>k)
    {                               //这个括号缺少匹配
                                    //语句;
    else
```

```
    {
        //语句;
    }
}
```

这里，if 语句的第一个花括号缺少匹配，因此将无法通过编译。

编译系统具有括号匹配的一个检测功能。那么括号匹配的功能是如何实现的呢？

7.5.1　括号匹配算法

我们先来分析一下括号匹配问题。括号匹配的一个基本规则便是括号应该成对出现，并且可以进行嵌套。可以使用的括号包括如下几种：

- 花括号“{}”
- 方括号“[]”
- 圆括号“()”
- 尖括号“<>”

在这些括号中，因为往往是成对出现的，因此可以具体分为左括号和右括号：

- 左括号：“{”、“[”、“(”和“<”。
- 右括号：“}”、“]”、“)”和“>”。

根据前述的括号匹配原则，可知如下的几种形式都是匹配的：

[]、{[]}、{[[()]<>]}等。

而以下几种则是不匹配的情况：

[]{>{}、(){}}><>}、}[><()等。

判断括号匹配用到了栈结构，其操作步骤如下：

（1）输入 1 个字符，当该字符是括号字符时，程序进入循环处理。

（2）如果是左括号，则将其入栈，继续执行步骤（1）。

（3）如果是右括号，则取出栈顶数据进行对比，如果匹配则不进行操作；否则必须先将刚才取出的栈顶数据重新入栈，再将刚才输入的括号字符也入栈。

（4）然后再输入下一个字符，重复执行，直到所有的字符都得到操作。

我们按照这个思路便可以编写相应的算法来判断括号是否匹配。代码示例如下：

```
class Stack
{
    char[] data;
    int maxSize;
    int top;
}                           //栈结构

void pipei()
{
    Stack stack;
    char ch,temp;
    int match;

    stack=new Stack(0) ;                          //初始化一个栈结构,空栈
    BufferedReader reader = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
    ch =(char)reader.read();                      //输入一个字符
```

```
        while(ch!='0')                                    //循环处理
        {
            if(getElementCount()==-1)
            {
                push(ch);
            }
            else
            {
                temp=pop();                               //取出栈顶元素
                match=0;

                if(temp=='(' && ch==')')                  //判断是否匹配
                {
                    match=1;
                }
                if(temp=='[' && ch==']')
                {
                    match=1;
                }
                if(temp=='<' && ch=='>')
                {
                    match=1;
                }
                if(temp=='{' && ch=='}')
                {
                    match=1;
                }

                if(match==0)                              //如果不匹配
                {
                    push(temp);                           //原栈顶元素重新入栈
                    push(ch);                             //将输入的括号字符入栈
                }
            }
            ch =(char)reader.read();                      //输入一个字符
        }
        if(getElementCount()==-1)
        {
            System.out.printf("输入的括号完全匹配!\n");           //完全匹配
        }
        else
        {
            System.out.printf("输入的括号不匹配，请检查!\n");      //不完全匹配
        }
    }

}
```

由于这里需要用到栈结构，因此首先定义了栈结构类型 Stack。数据项 data 为栈内数据，数据项 top 为栈顶引用，maxSize 为栈大小。

方法 pipei()便是判断括号是否匹配的算法。在程序中，循环对比每个输入的字符来判断是否匹配，然后进行相应的处理。该程序严格遵循了前述的算法，读者可以对照着加深理解。最后，如果栈为空，表示所有的括号都匹配；否则表示有不匹配的括号，输出显示结果。

7.5.2　括号匹配求解

有了前面括号匹配算法之后，我们便可以完成括号匹配的判断问题。由于需要使用到栈结构，读者可以参阅前面章节中的介绍。这里，我们给出一个完整的例子，演示括号匹配判断的过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 7-6】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.Scanner;

class Stack {
    char[] data;
    int maxSize;
    int top;

    Scanner input=new Scanner(System.in);
    public Stack(int maxSize)
    {
        this.maxSize = maxSize;
        data = new char[maxSize];
        top = -1;
    }

    public int getSize()
    {
        return maxSize;
    }

    public int getElementCount()
    {
        return top;
    }

    public boolean isEmpty()
    {
        return top == -1;
    }

    public boolean isFull()
    {
        return top+1 == maxSize;
    }

    public boolean push(char data)
    {
        if(isFull())
          {
                System.out.println("栈已满!");
                return false;
          }
        this.data[++top] = data;
        return true;
    }
```

```
    public char pop() throws Exception
    {
     if(isEmpty())
     {
           throw new Exception("栈已空!");
     }
     return this.data[top--];
}

    public char peek()
    {
     return this.data[getElementCount()];
    }

    void pipei() throws Exception
     {
     Stack stack;
     char ch,temp;
           int match;
           stack=new Stack(0) ;                                    //初始化一个栈结构,空栈
     BufferedReader reader = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
           ch =(char)reader.read();                                //输入一个字符
           while(ch!='0')                                          //循环处理
           {
                 if(getElementCount()==-1)
                 {
                       push(ch);
                 }
                 else
                 {
                       temp=pop();                                 //取出栈顶元素
                       match=0;
                 if(temp=='(' && ch==')')                          //判断是否匹配
                 {
                       match=1;
                 }
                 if(temp=='[' && ch==']')
                 {
                       match=1;
                 }
               if(temp=='<' && ch=='>')
                 {
                       match=1;
                 }
               if(temp=='{' && ch=='}')
                 {
                       match=1;
                 }
             if(match==0)                                          //如果不匹配
             {
                   push(temp);                                     //原栈顶元素重新入栈
                   push(ch);                                       //将输入的括号字符入栈
               }
           }
           ch =(char)reader.read();                                //输入一个字符
      }
      if(getElementCount()==-1)
       {
           System.out.printf("输入的括号完全匹配!\n");             //完全匹配
```

```
        }
        else
        {
            System.out.printf("输入的括号不匹配，请检查!\n");      //不完全匹配
        }
    }

}
public class P8_6
{
    public static void main(String[] args) throws Exception
    {
        String go;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        Stack s=new Stack(20);
        System.out.printf("括号匹配问题！\n");

        do{
        System.out.printf("请先输入一组括号组合，以 0 表示结束。支持的括号包括：{},(),[],<>。\n");

        s.pipei();                //匹配算法

        System.out.print("\n 继续玩吗(y/n)?");
        go=input.next();
        }while(go.equalsIgnoreCase("y"));

        System.out.printf("游戏结束！\n");

    }
}
```

在这里，用到了栈结构，包括初始化栈、入栈和出栈等操作，读者可以参阅前面章节的介绍来理解。在主方法中，首先调用 pipei()方法，由用户输入一组括号组合，以 0 表示结束，支持的括号包括“{}”、“[]”、“()”和“<>”。方法 pipei()进行判断并输出结果。

该程序可以执行多次。执行该程序，输入相应的括号组合，得到如下结果，如图 7-13 所示。

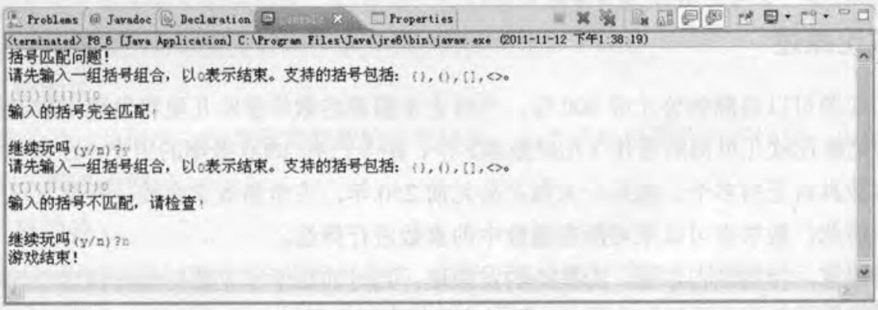


图 7-13　执行结果

7.6 小　　结

选择合理的数据结构往往对于问题的求解起到事半功倍的效果。在前面章节介绍的几种基本数据结构的基础上，本章讲解了几个典型的应用实例。通过这几个例子，读者可以领会到数据结构在求解实际问题中的应用。如果想学会算法和数据结构，读者应该熟练掌握本章内容。

第 8 章 数论问题

数论是一门古老的学科，是数学中最早研究的方向。数论虽然久远，但是其仍然充满了无穷的魅力，至今仍吸引着无数著名的数学家在其中耕耘。简单地说，数论就是研究数字的一门学科。数论的问题简单而又充满了智慧，数论是算法的一个最好的练兵场。通过简单而有趣的数论问题，不仅可以演练算法的应用，更可以激发读者研究数学的乐趣。本章就对最基本的数论问题进行探讨，并给出相应的算法。

8.1 数论概述

数论是一门研究整数性质的数学学科。在中国古代和西方都有对数论相关问题的探讨，有些基本问题中国古代研究得更早。不过由于西方研究得更为系统，因此数论中的很多概念是采用西方数学家所定义的。

8.1.1 数论概述

数论的起源可以追溯到公元前 300 年，当时古希腊著名数学家欧几里得发现了数论的本质是素数。这主要记载在欧几里得的著作《几何原本》中，距今已有 2000 多年的历史。在该书中，欧几里得证明了素数具有无穷多个。随后，大概在公元前 250 年，古希腊数学家埃拉托塞发现了素数的一种筛选法。借此，数学家可以来对所有整数中的素数进行筛选。

在西方国家，特别是古希腊，为数论的发源地。当时的数学家主要对整除性这个基本的数论问题进行了系统的研究。在中国古代，也有很多数学家讨论了数论的内容，例如最大公因数、不定方程的整数解等。

在随后的年代，由于西方国家采用了更为方便的阿拉伯数字来进行计数，数论问题更多地被西方数学家研究。但是，每个数学家都只研究数论的一个或一些方面，并没有归为一个系统的科学。

在 18 世纪末，被誉为“数学王子”的德国数学家高斯，完成了经典著作《算术研究》。在《算术研究》中，高斯将历代的数论问题进行统一的符号处理，将已有的成果进行系统化，并提出了很多新的概念和研究方法。这样，数论才真正走向成熟，成为一门独立的学科。

随后，随着数学研究的深入，更多的数论研究工具和成果出现，使得数论不断繁荣。

在国外，欧几里得、费马、欧拉、高斯、拉马努金等赫赫有名的数学家都曾经在数论领域耕耘。在国内华罗庚、陈景润、王元也是世界著名的数论研究学者。中国古代的《周髀算经》、《孙子算经》和《九章算术》等都记载了数论的相关研究成果。例如，著名的中国剩余定理也称为孙子定理，比西方国家要早 500 年。

8.1.2　数论的分类

按照研究方法的复杂程度，数论可以简单地分为初等数论和高等数论。其中初等数论也称为古典数论，而高等数论也称为近代数论。高等数论按照研究方法的不同，还可以细分为代数数论、解析数论等。下面就简单介绍一下不同数论的研究方法和内容。

1．初等数论

初等数论是数论中最为古老的一个分支，其以初等、算术、朴素的方法来研究数论问题。初等数论起源于古希腊，当时毕达哥拉斯及其学派研究和诸如亲和数、完全数、多边形数等基本问题。到了公元前 4 世纪，欧几里德在其著作《几何原本》中建立了完整的体系，并初步建立了整数的整除理论。

初等数论中非常经典的成就包括算术基本定理、中国剩余定理、欧拉定理、高斯的二次互逆律、勾股方程的商高定理、欧几里德的质数无限证明等。

2．解析数论

解析数论的创始人是德国数学家黎曼。解析数论使用现代微积分以及复变函数分析等方法来研究整数问题。通过黎曼 zeta 函数与素数之间的奇妙联系，可以获得很多素数的性质。著名的黎曼假设也是现代数学中一个著名的难题。

3．代数数论

代数数论在代数数域来研究整数，将整数环的数论性质研究扩展到了更为一般的整环中。在代数数论中，一个重要的目标就是解决不定方程的求解问题。

4．几何数论

几何数论通过几何的方法来研究整数的分布情况，从中获取整数的一些性质。几何数论是俄国数学家闵科夫斯基所创立。

5．计算数论

计算数论是伴随着计算机的产生而产生的。借助于高性能计算机的计算能力，来解决数论问题。例如，典型的素数测试和质因数分解等。在信息安全领域，公钥密码的基础便是基于质因数分解的。

6．超越数论

超越数论主要研究数的超越性，同时也研究数的丢番图逼近理论和欧拉常数。

7．组合数论

组合数论由艾狄胥首先创立，其利用了排列组合和概率的技巧来解决一些初等数论无法解决的复杂问题。

8．算术代数几何

算术代数几何是最新的研究方向，其从代数几何的角度出发，通过深刻的数学工具来研究数论问题和整数的性质。这方面近期的一个最伟大的成就便是费马大定理的证明，由普林斯顿大学的英国数学家外尔斯完成，几乎用到了当时最深刻的理论工具。

8.1.3 初等数论

数论的起源可谓古老，但至今仍然有着无穷的魅力。那是因为数论中的每个命题都是世界级的难题。例如：费马大定理、孪生素数问题、歌德巴赫猜想、圆内整点问题、完全数问题等。这些难题吸引着无数的数学家为之奋斗，从而也推动了数论乃至整个数学领域的发展。

本章主要介绍的便是初等数论中的一些基本问题及其算法实现，这些基本问题是数论的基础。我们首先看看初等数论的主要研究内容。

1．整除理论

主要包括欧几里德的辗转相除法、算术基本定理等。其中，也引入了整除、倍数、因数、素数等基本概念。

2．同余理论

主要包括二次互反律、欧拉定理、中国剩余定理等。其中，引入了同余、原根、指数、平方剩余、同余方程等概念。同余理论的最早源自于高斯的《算术研究》。

3．连分数理论

主要研究整数平方根的连分数展开。其中，引入了连分数及相应算法的概念。例如，循环连分数展开、佩尔方程求解等。

4．不定方程

主要研究低次代数曲线对应的不定方程，例如勾股方程的商高定理、佩尔方程的连分数求解等。

5．数论函数

主要研究欧拉函数、莫比乌斯变换等内容。

8.1.4 本章用到的基本概念

我们下面要讨论的算法都是与这些初等数论（也称为古典数论）问题息息相关的。在介绍这些基本数论问题和算法之前，这里首先总结一下将会用到的一些基本数学及数论概念，这有助于读者的理解。

- 自然数：一般将大于等于 0 的正整数称为自然数。
- 因数：一个数的因数就是所有可以整除这个数的数。
- 倍数：如果一个整数能够被另一个整数整除，这个整数就是另一个整数的倍数。
- 因子：一个数的因子就是所有可以整除这个数的数，而不包括该数本身。因子也称为真因数。
- 奇数：整数中，不能够被 2 整除的数。
- 偶数：整数中，能够被 2 整除的数。
- 素数：又称为质数，指在一个大于 1 的自然数中，除了 1 和此整数自身外，没法被其他自然数整除的数。

- 调和数：如果一个正整数的所有因子的调和平均是整数，那么这个正整数便是调和数。调和数又称为欧尔数或者欧尔调和数。
- 完全数：完全数等于其所有真因子的和，完全数又称完美数或完备数。
- 亏数：亏数大于其所有真因子的和。
- 盈数：盈数小于其所有真因子的和。
- 亲密数：如果整数 a 的因子和等于整数 b，整数 b 的因子和等于整数 a，因子包括 1 但不包括本身，且 a 不等于 b，则称 a、b 为亲密数对。
- 水仙花数：指一个 n 位数（n≥3），它的每个位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。
- 阿姆斯特朗数：其值等于各位数字的 n 次幂之和的 n 位数，又称为 n 位 n 次幂回归数。
- 自守数：指一个数的平方的尾数等于该数自身的自然数。
- 最大公约数：指某几个整数共有因子中最大的一个
- 最小公倍数：指某几个整数共有倍数中最小的一个。

8.2 完 全 数

完全数（Perfect number）是一些特殊的自然整数。完全数等于其所有因子的和。这里所谓的因子就是所有可以整除这个数的数，而不包括该数本身。本节将简单介绍完全数的基本规则和性质，以及判断完全数的算法。

8.2.1 什么是完全数

其实谈到完全数，与之间相关的两个概念便是亏数和盈数。一般来说，通过其所有真因子的和判断一个自然数是亏数、盈数以及完全数。

- 当一个自然数的所有真因子的和小于该自然数，那么该自然数便是亏数；
- 当一个自然数的所有真因子的和大于该自然数，那么该自然数便是盈数；
- 当一个自然数的所有真因子的和等于该自然数，那么该自然数便是完全数。

例如，4 的所有真因子包括 1 和 2，而 4>1+2，所以 4 是一个亏数；6 的所有真因子包括 1、2、3，而 6=1+2+3，因此 6 是一个完全数；12 的所有真因子包括 1、2、3、4、6，而 12<1+2+3+4+6，所以 12 是一个盈数。下面我们举几个典型的完全数的例子：

6=1+2+3

28=1+2+4+7+14

496=1+2+4+8+16+31+62+124+248

8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064

对于完全数的研究，可以追溯到公元前 6 世纪。当时，毕达哥拉斯已经发现 6 和 28 是完全数。到目前为止，总共找到 47 个完全数。而寻找完全数是比较困难的，完全数的值越来越大，有的时候需要借助高速的计算机来寻找。在所有的自然数中总共有多少个完全数，这个仍然是个谜，许多数学家在为之奋斗。另外一个奇特的是，目前所有发现的完全数都是偶数，到底是否存在奇数的完全数也是一个谜。

人们不断研究完全数是因为其有许多奇特的性质，例如：

1. 每一个完全数都可以表示成连续自然数的和

每一个完全数都可以表示成连续自然数的和，这些自然数并不一定是完全数的因数。例如：

6=1+2+3

28=1+2+3+4+5+6+7

496=1+2+3+4+…+29+30+31

2. 每一个完全数都是调和数

我们知道，如果一个正整数的所有因子的调和平均是整数，那么这个正整数便是调和数。而每一个完全数都是调和数，例如：

对于完全数 6 来说，1/1+1/2+1/3+1/6=2

对于完全数 28 来说，1/1+1/2+1/4+1/7+1/14+1/28=2

3. 每一个完全数都可以表示为 2 的一些连续正整数次幂之和

每一个完全数都可以表示为 2 的一些连续正整数次幂之和，例如：

6=2^1+2^2

28=2^2+2^3+2^4

8128=2^6+2^7+2^8+2^9+2^10+2^11+2^12

4. 已知的完全数都是以 6 或者 8 结尾

已知的完全数都是以 6 或者 8 结尾，例如 6、28、496、8 128、33 550 336 等。从这里也可以看出，已知的每一个完全数都是偶数，但还没有严格证明没有奇数的完全数。

5. 除 6 之外的完全数都可以表示成连续奇立方之和

除 6 之外的完全数都可以表示成连续奇立方之和，例如：

28=1^3+3^3

496=1^3+3^3+5^3+7^3

8128=1^3+3^3+5^3+…+15^3

8.2.2 计算完全数算法

完全数至今仍是数学家研究的重点，我们这里可以通过完全数的定义来编写计算机查找完全数的算法。代码示例如下：

```
void Perfectnum(long fanwei)                    //计算完全数算法
{
    long[] p=new long[300];                     //保存分解的因子
    long i,j,sum,num;
    int k,count;

    for(i=1;i<fanwei;i++)                       //循环处理每 1 个数
    {
        count=0;
        num=i;
        sum=num;
        for(j=1;j<num;j++)                      //循环处理每 1 个数
        {
```

```
                if(num % j==0)
                {
                    p[count++]=j;                    //保存因子，计数器 count 增加 1
                    sum=sum-j;                       //减去一个因子
                }
            }
            if(sum==0)
            {
                System.out.printf("%4d 是一个完全数,因子是",num);
                System.out.printf("%d=%d",num,p[0]);    //输出完数
                for(k=1;k<count;k++)                    //输出因子
                {
                    System.out.printf("+%d",p[k]);
                }
                System.out.printf("\n");
            }
        }
}
```

在这里，输入参数 fanwei 为待查找完全数的范围。在该函数中通过双重循环对每一个数进行判断，当查找到一个完全数之后，便输出该完全数的所有真因子。算法的执行过程完全遵照了完全数的定义，读者可以对照着加深理解。

下面我们通过一个完整的例子来看看查找完全数算法的应用，这里通过程序来列举 10 000 以内的所有完全数。完整的程序代码示例如下：

【程序 8-1】

```
public class P9_1 {
    static void Perfectnum(long fanwei)              //计算完全数算法
    {
        long[] p=new long[300];                      //保存分解的因子
        long i,j,sum,num;
        int k,count;

        for(i=1;i<fanwei;i++)                        //循环处理每 1 个数
        {
            count=0;
            num=i;
            sum=num;
            for(j=1;j<num;j++)                       //循环处理每 1 个数
            {
                if(num % j==0)
                {
                    p[count++]=j;                    //保存因子，计数器 count 增加 1
                    sum=sum-j;                       //减去一个因子
                }
            }
            if(sum==0)
            {
                System.out.printf("%4d 是一个完全数,因子是",num);
                System.out.printf("%d=%d",num,p[0]); //输出完数
                for(k=1;k<count;k++)                 //输出因子
                {
                    System.out.printf("+%d",p[k]);
                }
                System.out.printf("\n");
```

```
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        long fanwei;

        fanwei=10000;                          //初始化范围
        System.out.printf("查找%d 之内的完全数：\n",fanwei);
        Perfectnum(fanwei);                    //查找完全数

    }
}
```

在该程序中，主方法首先初始化待查找的范围，也就是 10000，然后调用 Perfectnum()方法来逐个查找完全数并列举出来。该程序执行的结果，如图 8-1 所示。

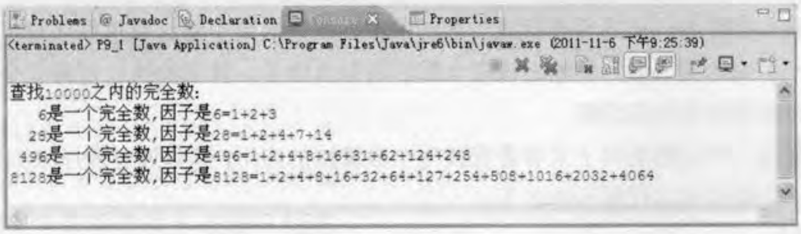


图 8-1　执行结果

8.3　亲　密　数

亲密数具体特殊性质的整数。谈到亲密数，其实是一对亲密数。亲密数展示了两个整数之间通过因子的密切联系。

8.3.1　什么是亲密数

如果整数 a 的因子和等于整数 b，整数 b 的因子和等于整数 a，因子包括 1 但不包括本身，且 a 不等于 b，则称 a、b 为亲密数对。

例如，220 和 204 便是一对亲密数，因为其满足如下规则：

220 的各个因子之和为：1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=204；

204 的各个因子之和为：1+2+4+71+142=220。

另外，1184 和 1210 是一对亲密数，因为其满足如下规则：

1184 的各个因子之和为：1+2+4+8+16+32+37+74+148+296+592=1210；

1210 的各个因子之和为：1+2+5+10+11+22+55+110+121+242+605=1210。

像这样的亲密数对，还可以找到很多。

8.3.2　计算亲密数算法

我们这里可以通过亲密数的定义来编写计算机查找亲密数对的算法。代码示例如下：

```
int friendnum(int a)                    //亲密数对算法
{
        int i,b1,b2,count;
        for(i=0;i<100;i++)              //清空数组
        {
            ga[i]=gb[i]=0;
        }
        count=0;                        //数组下标
        b1=0;                           //累加和
        for(i=1;i<a/2+1;i++)            //求数 a 的因子
        {
            if(a%i==0)                  //a 能被 i 整除
            {
                ga[count++]=i;          //保存因子到数组，方便输出
                b1+=i;                  //累加因子之和
            }
        }
        count=0;
        b2=0;
        for(i=1;i<b1/2+1;i++)           //将数 a 因子之和再进行因子分解
        {
            if(b1%i==0)                 //b1 能被 i 整除
            {
                gb[count++]=i;          //保存因子到数组
                b2=b2+i;                //累加因子之和
            }
        }
        if(b2==a && a<b1)               //判断 A，B 的输出条件
        {
            return b1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
}
```

在这里，输入参数 a 为一个正整数，该函数通过算法来寻找 a 的亲密数，如果找到则返回该亲密数；否则返回 0。程序中，对于输入的参数 a，首先将其因子分解出来，并保存在一个数组 ga 中，而各个因子之和保存在变量 b1 中。然后，将 b1 再次进行因子分解，并将因子保存在数组 gb 中，而各个因子之和保存在变量 b2 中。最后，判断 b2 和 a，如果若 b2 等于 a，并且 b1 不等于 b2，则找到一对亲密数为 a 和 b1。读者可以对照算法来加深对亲密数的理解。

下面我们通过一个完整的例子来看看查找亲密数对算法的应用，这里通过程序来列举 5000 以内的所有亲密数对。完整的程序代码示例如下：

【程序 8-2】

```
#include <stdio.h>

int ga[100],gb[100];                    //保存因子的数组

int friendnum(int a)                    //亲密数对算法
{
        int i,b1,b2,count;
        for(i=0;i<100;i++)              //清空数组
```

```
        {
            ga[i]=gb[i]=0;
        }
        count=0;                          //数组下标
        b1=0;                             //累加和
        for(i=1;i<a/2+1;i++)              //求数 a 的因子
        {
            if(a%i==0)                    //a 能被 i 整除
            {
                ga[count++]=i;            //保存因子到数组，方便输出
                b1+=i;                    //累加因子之和
            }
        }
        count=0;
        b2=0;
        for(i=1;i<b1/2+1;i++)             //将数 a 因子之和再进行因子分解
        {
            if(b1%i==0)                   //b1 能被 i 整除
            {
                gb[count++]=i;            //保存因子到数组
                b2=b2+i;                  //累加因子之和
            }
        }
        if(b2==a && a<b1)                 //判断 A，B 的输出条件
        {
            return b1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
}

void main()
{
    int i,b,fanwei,count;

    fanwei=5000;                          //初始化
    printf("列举 1~%d 之间的所有亲密数对!\n",fanwei);
    for(i=1;i<fanwei;i++)
    {
        b=friendnum(i);
        if(b!=0)
        {
          printf("\n%d--%d 是亲密数，示例如下：",i,b); //输出亲密数
          printf("\n%d 的各个因子之和为:1",i);
          count=1;
          while(ga[count]>0)              //输出一个数的因子
          {
              printf("+%d",ga[count]);
              count++;
          }
            printf("=%d\n",b);
          printf("%d 的各个因子之和为:1",b);
          count=1;
          while(gb[count]>0)              //输出另一个数的因子
```

```
            {
                printf("+%d",gb[count]);
                count++;
            }
            printf("=%d\n",i);
        }
    }
}
```

在该程序中，保存因子的数组 ga 和 gb 作为全局变量，这样便于后面输出各个因子。主方法中，首先待查找的范围，然后通过 for 循环来对每一个整数进行处理。当查找到亲密数对后，将结果输出。该程序执行的结果，如图 8-2 所示。

图 8-2　执行结果

8.4　水 仙 花 数

水仙花数是指一个 n 位正整数（n≥3），它的每个位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。水仙花数也是一种具有奇特性质的数。

8.4.1　什么是水仙花数

水仙花数最先是由英国数学家哈代（G.H.Hardy）发现的，他发现一些三位数满足如下奇特的现象：

$153=1^3+5^3+3^3$

$370=3^3+7^3+0^3$

$371=3^3+7^3+1^3$

$407=4^3+0^3+7^3$

简单地说，这些三位正整数在数值上等于其各位数字的立方之和（也就是 3 次幂之和）。哈代称为“水仙花数”。

除此之外，进一步研究发现还存在更高位数的水仙花数。以上所述均为三位的水仙花数，而四位的水仙花数有如下 3 个：

$1634=1^4+6^4+3^4+4^4$

$8208=8^4+2^4+0^4+8^4$

$9474=9^4+4^4+7^4+4^4$

五位的水仙花数共有 3 个，示例如下：

$54748=5^5+4^5+7^5+4^5+8^5$

$92727=9^5+2^5+7^5+2^5+7^5$

$93084=9^5+3^5+0^5+8^5+4^5$

而六位的水仙花数则只有一个，示例如下：

$548834=5^6+4^6+8^6+8^6+3^6+4^6$

数学家在理论上证明，最大的水仙花数不超过 34 位。因此，水仙花数是有限的。这种推广的水仙花数有时也称为阿姆斯特朗数。不同位数的水仙花数的个数如下：

- 三位水仙花数：共 4 个；
- 四位水仙花数：共 3 个；
- 五位水仙花数：共 3 个；
- 六位水仙花数：共 1 个；
- 七位水仙花数：共 4 个；
- 八位水仙花数：共 3 个；
- 九位水仙花数：共 4 个；
- 十位水仙花数：共 1 个；

……

当然还有很多，这里仅列举了前 10 位的水仙花数的个数。读者可以根据水仙花数的定义来编写相应的算法，寻找相应位数上的水仙花数。这是一个非常有意思的尝试。

8.4.2 计算水仙花数算法

由于水仙花数按照不同的位数来分，这里我们给出 n 位水仙花数的计算算法。代码示例如下：

```
void NarcissusNum(int n)                              //判断水仙花数算法
{
    long i,start,end,temp,num,sum;
    int j;

    start=(long)Math.pow(10,n-1);                     //起始数据
    end=(long)Math.pow(10,n)-1;                       //终止数据
    for(i=start;i<=end;i++)                           //逐个判断
    {
        temp=0;
        num=i;
        sum=0;
        for(j=0;j<n;j++)                              //分解各位
        {
            temp=num%10;
            sum=sum+(long)Math.pow(temp,n);           //n 次幂累加
            num=(num-temp)/10;
        }
        if(sum==i)
        {
```

```
                System.out.printf("%d\n",i);                    //输出水仙花数
            }
        }
    }
```

在这里，输入参数 n 表示需要查找的水仙花数的位数。在该算法中，首先计算起始数据和终止数据，然后对所有数据逐个判断。在进行判断的时候，基本是根据水仙花数的定义来判断的。也就是，将数据的各个位分离出来，并逐位进行 n 次幂的累加，最后判断累加的结果是否与原数据相等，如果相等则表示该数据是水仙花数。最后输出所有的水仙花数。

这里需要注意的是，算法的关键是如何分离数据的 n 位。我们采用如下的算法来实现：

（1）计算数据 num 的个位数，并将其赋值给 temp。

（2）计算个位数的 n 次幂，并累加到 sum 中。

（3）移位操作，将 num 减去个位数 temp 后，再除 10，便相当于数据的右移操作。此时位数减少一位，并将结果重新赋值给 num。

（4）重复步骤（1）的操作，直到所有的位数都得到处理为止。

这样，我们便分离出了 n 位的数字并得到了其 n 次幂的累加和。

下面我们通过一个完整的例子来看看查找水仙花数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-3】

```
public class P8_3
{
    static void NarcissusNum(int n)                         //判断水仙花数算法
    {
        long i,start,end,temp,num,sum;
        int j;

        start=(long)Math.pow(10,n-1);                       //起始数据
        end=(long)Math.pow(10,n)-1;                         //终止数据
        for(i=start;i<=end;i++)                             //逐个判断
        {
            temp=0;
            num=i;
            sum=0;
            for(j=0;j<n;j++)                                //分解各位
            {
                temp=num%10;
                sum=sum+(long)Math.pow(temp,n);             //n 次幂累加
                num=(num-temp)/10;
            }
            if(sum==i)
            {
                System.out.printf("%d\n",i);                //输出水仙花数
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int n;

        n=3;                                                //初始化位数
        System.out.printf("列举%d 位的水仙花数：\n",n);
        NarcissusNum(n);                                    //列举所有水仙花数
```

```
            System.out.printf("\n");
            n=4;                                               //初始化位数
            System.out.printf("列举%d 位的水仙花数：\n",n);
            NarcissusNum(n);                                   //列举所有水仙花数
            System.out.printf("\n");
    }
}
```

在该程序中，首先初始化位数 n=3，然后调用 NarcissusNum()方法来列举所有 3 位水仙花数。接着初始化位数 n=4，然后调用 NarcissusNum()方法来列举所有 4 位水仙花数。该程序执行的结果，如图 8-3 所示。

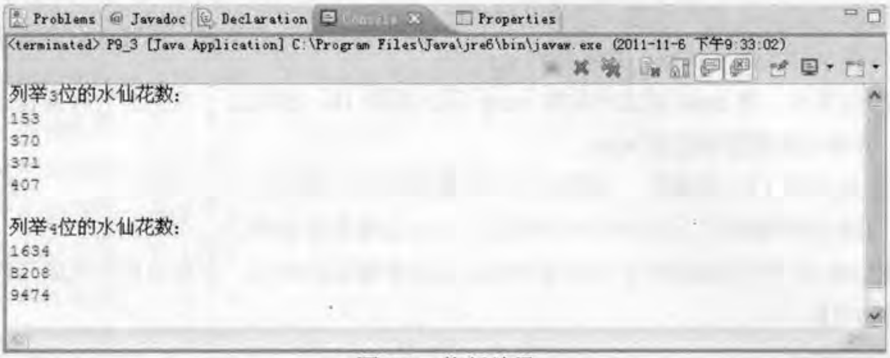


图 8-3　执行结果

读者也可以修改主方法来列举所有的其他位数的水仙花数，但是要记住，理论上证明最大的水仙花数不超过 34 位，因此 n 的值不应超过 34 位。另外，随着位数的增加，算法需要处理的数据也在增多，算法计算的过程会比较慢，对计算机的配置要求比较高。

8.5　自　守　数

如果一个正整数的平方的末尾几位数等于这个数本身，那么这个数便称为自守数。自守数包含了很多奇特的性质。

8.5.1　什么是自守数

依照自守数的定义，我们很容易找到一些简单的自守数，例如：

5 是一个一位自守数，因为 5^2=25，末尾仍然为 5。

6 是一个一位自守数，因为 6^2=36，末尾仍然为 6。

25 是一个两位自守数，因为 25^2=625，末尾两位仍然为 25。

76 是一个两位自守数，因为 76^2=5776，末尾两位仍然为 76。

625 是一个三位自守数，因为 625^2=390625，末尾两位仍然为 625。

376 是一个三位自守数，因为 376^2=141376，末尾两位仍然为 376。

……

不过，细心的读者可能会说，0 和 1 也是自守数，因为 0^2=0，1^2=1，满足自守数的定义。不过，由于 0 和 1 这两个数过于简单，没有什么奇特的性质，因此没有太多的研究价值。故一般在数学上不将其归入自守数中。

自守数有许多奇特的性质，例如：

1．以自守数为后几位的两数相乘，结果的后几位仍是这个自守数

自守数的一个最基本特点便是，以自守数为后几位的两数相乘，结果的后几位仍是这个自守数。例如，76 是一个两位的自守数，以 76 为后两位的两个数相乘，那么乘积的结果的后两位仍然是 76，示例如下：

176×576=101376

276×376=103776

2．n+1 位的自守数出自 n 位的自守数

在所有的自守数中，n+1 位的自守数出自 n 位的自守数。例如：

- 625 是一个三位自守数，其末尾两位为 25，仍然是一个自守数。而 25 是一个两位自守数，其末尾一位为 5，而 5 是一个一位自守数。
- 376 是一个三位自守数，其末尾两位为 76，仍然是一个自守数。而 76 是一个两位自守数，其末尾一位为 6，而 6 是一个一位自守数。

这样，如果知道了 n 位的自守数，那么 n+1 的自守数也就是其前面增加一位数就可以了，在有的场合可以减轻计算量。

3．两个 n 位自守数的和等于 10^n+1

两个 n 位自守数的和等于 10^n+1，示例如下：

5+6=11=10^1+1

25+76=101=10^2+1

625+376=1001=10^3+1

……

8.5.2　计算自守数算法

最简单的计算自守数的算法就是遵循自守数的定义，代码示例如下：

```
int zishounum1(long n)                          //判断自守数算法 1
{
      long temp,m,k;
      int count;

      k=1;
      count=0;
      while(k>0)                                //判断位数
      {
            k=n-(long)Math.pow(10,count);
            count++;
      }
      m=count-1;                                //位数
      temp=(n*n)%((long)(Math.pow(10,m)));
      if(temp==n)                               //判断是否为自守数
      {
            return 1;
      }
      else
```

```
        {
            return 0;
        }
}
```

在这里，输入参数 n 为待判断的整数，如果 n 为自守数则该方法返回 1，否则返回 0。程序中，首先判断输入整数 n 的位数，然后按照自守数的定义，计算 n 的平方，并对末几位进行判断，看其是否满足自守数的定义。

这个算法比较简单，但是存在一定的问题。当输入参数 n 比较大，n 和 n 乘积的结果将非常大，这一方面影响计算速度，另一方面容易造成数据范围溢出。我们需要寻找更为合理的算法。

首先，我们来简单分析一下整数平方的计算过程，从中寻找算法的灵感。这里以计算 625 的平方为例，具体如下：

```
       6 2 5
  ×    6 2 5
  ------------
     3 1 2 5  ←—— 个位5×625
   1 2 5 0    ←—— 十位5×625
 3 7 5 0      ←—— 百位5×625
  ------------
 3 9 0 6 2 5
```

图 8-4　平方的计算过程

由于对于判断自守数来说，我们只需知道平方的后面 3 位数就可以了，而不必计算整个平方的结果。从这里的计算过程可知，在每一次的部分乘积中，并不是它的每一位都会对积的后 3 位产生影响。我们可以找到如下规律：

- 对于个位数与被乘数相乘的积中，用被乘数的后 3 位（625）与乘数的个位（5）相乘；
- 对于十位数与被乘数相乘的积中，用被乘数的后 2 位（25）与乘数的十位（20）相乘；
- 对于百位数与被乘数相乘的积中，用被乘数的后 1 位（5）与乘数的百分（600）相乘。

将以上各位相乘的积累加，再取最后 3 位即可。我们将以上规律推广，即可用来对多位数进行处理。

我们按照这个思路，可以编写如下的自守数计算算法：

```
int zishounum2(long num)                    //判断自守数算法 2
{
    long faciend,mod,n_mod,p_mod;           //mod 被乘数的系数，n_mod 乘数的系数，p_mod 部分乘积的系数
    long t,n;                               //临时变量

     faciend=num;                           //被乘数
    mod=1;
    do
     {
        mod*=10;                            //被乘数的系数
        faciend/=10;
    }while(faciend>0);                      //循环求出被乘数的系数
    p_mod=mod;                              //p_mod 为截取部分积时的系数
    faciend=0;                              //积的最后 N 位
    n_mod=10;                               //截取乘数相应位时的系数
    while(mod>0)
    {
        t=num % (mod*10);                   //获取被乘数
        n=num%n_mod-num%(n_mod/10);         //分解出每一位乘数作为乘数
        t=t*n;                              //相乘的结果
        faciend=(faciend+t)%p_mod;          //截取乘积的后面几位
        mod/=10;                            //调整被乘数的系数
        n_mod*=10;                          //调整乘数的系数
    }
    if(num==faciend)                        //判断自守数，并返回
```

```
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
    }
```

在这里，输入参数 n 为待判断的整数，如果 n 为自守数则该函数返回 1，否则返回 0。该程序严格遵循了前面介绍的算法，读者可以对照来加深理解。

下面我们通过一个完整的例子来看查找水仙花数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-4】

```
public class P9_4
{
    static int zishounum1(long n)               //判断自守数算法 1
    {
        long temp,m,k;
        int count;
        k=1;
        count=0;
        while(k>0)                              //判断位数
        {
            k=n-(long)Math.pow(10,count);
            count++;
        }
        m=count-1;                              //位数
        temp=(n*n)%((long)(Math.pow(10,m)));
        if(temp==n)                             //判断是否为自守数
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
    }

    static int zishounum2(long num)             //判断自守数算法 2
    {
    long faciend,mod,n_mod,p_mod;               //mod 被乘数的系数，n_mod 乘数的系数，p_mod 部分乘积的系数
        long t,n;                               //临时变量
        faciend=num;                            //被乘数
        mod=1;
        do
         {
            mod*=10;                            //被乘数的系数
            faciend/=10;
        }while(faciend>0);                      //循环求出被乘数的系数
        p_mod=mod;                              //p_mod 为截取部分积时的系数
        faciend=0;                              //积的最后 N 位
        n_mod=10;                               //截取乘数相应位时的系数
        while(mod>0)
        {
            t=num % (mod*10);                   //获取被乘数
```

```
            n=num%n_mod-num%(n_mod/10);        //分解出每一位乘数作为乘数
            t=t*n;                             //相乘的结果
            faciend=(faciend+t)%p_mod;         //截取乘积的后面几位
            mod/=10;                           //调整被乘数的系数
            n_mod*=10;                         //调整乘数的系数
        }
        if(num==faciend)                       //判断自守数，并返回
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        long i;
        System.out.printf("第一种算法计算自守数：\n");
        for(i=2;i<1000;i++)
        {
            if(zishounum1(i)==1)               //调用第一种算法
            {
                System.out.printf("%d ",i);
            }
        }
        System.out.printf("\n");

        System.out.printf("第二种算法计算自守数：\n");
        for(i=2;i<200000;i++)
        {
            if(zishounum2(i)==1)               //调用第二种算法
            {
                System.out.printf("%d ",i);
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }
}
```

在该程序中，主方法分别调用了两种计算自守数的算法来列举一定范围内的自守数。程序执行的结果，如图 8-5 所示。

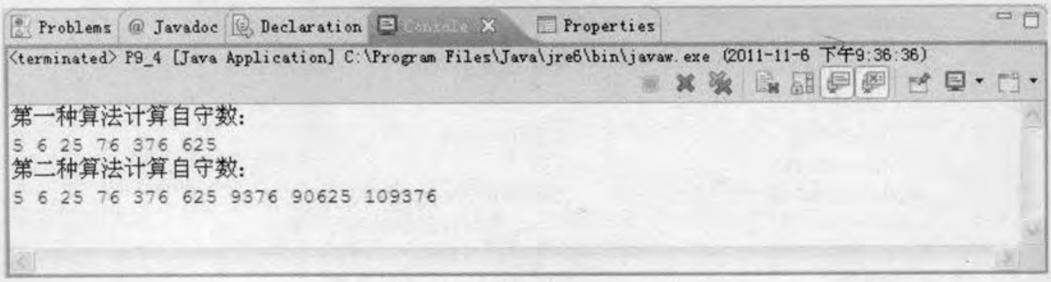


图 8-5　执行结果

8.6 最大公约数

最大公约数和最小公倍数是我们接触非常多的。如果有一个自然数 a 能被自然数 b 整除，则称 a 为 b 的倍数，b 为 a 的约数。几个自然数公有的约数，叫做这几个自然数的公约数。公约数中最大的一个，一般就称为这几个自然数的最大公约数（greatest common divisor，简写为 gcd）。

例如，在自然数 4、8、12 中，1、2 和 4 是这几个自然数的公约数，而 4 则是最大公约数。

关于最大公约数的讨论最早见于欧几里德的《几何原本》，著于公元前 300 年左右。欧几里德在该书中提出了一个非常经典的计算最大公约数的方法——辗转相除法，后人也称之为欧几里德算法。现代来说，计算最大公约数还有 Stein 算法等。

8.6.1 计算最大公约数算法——辗转相除法

欧几里德的辗转相除算法是计算两个自然数最大公约数的传统算法，对于多个自然数可以执行多次辗转相除法来得到。辗转相除法的执行过程如下：

（1）对于已知两自然数 m、n，假设 m>n；

（2）计算 m 除以 n，将得到的余数记为 r；

（3）如果 r=0，则 n 为求得的最大公约数，否则执行下面一步；

（4）将 n 的值保存到 m 中，将 r 的值保存到 n 中，重复执行步骤（2）和（3），直到 r=0，便得到最大公约数。

我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int gcd(int a, int b)                    //最大公约数
{
    int m,n,r;
     if(a>b)                             //m 保存较大数,n 保存较小数
     {
          m=a;
          n=b;
     }
     else
     {
          m=b;
          n=a;
     }
    r=m%n;                               //求余数
    while(r!=0)                          //辗转相除
    {
         m=n;
         n=r;
         r=m%n;
    }
    return n;                            //返回最大公约数
}
```

在这里，输入参数为两个自然数 a 和 b，a 和 b 谁大谁小没有要求。程序开始时首先判断 a 和 b 的大小，从而为 m 和 n 赋值。m 保存较大数，n 保存较小数。接着，按照辗转相除法的思路来计算最大公约数。读者可以对照代码和算法思路来加深理解。

8.6.2 计算最大公约数算法——Stein 算法

欧几里德的辗转相除法是最经典的计算最大公约数的算法，算法简单但同时也有非常高的执行效率。但是如果参与运算的数据非常大，辗转相除法就暴露了其缺点。例如，计算机中的整数一般最多也就 64 位，如果参与运算的整数低于 64 位，那么取模的算法比较简单，直接采用%运算符就可以了。对于计算两个超过 64 位的整数的模，用户往往需要采用类似于多位数除法手算过程中的试商法。这个试商法过程不但复杂，而且要消耗很多 CPU 时间，致使辗转相除法效率变低。

Stein 算法便解决了这个问题。Stein 算法不采用除法和取模运算，而是采用整数的移位和最普通的加减法。这样，在计算超过 64 位的整数的时候，算法执行效率非常高。

下面我们来看看 Stein 算法的执行过程。假设计算 a 和 b 两个数的最大公约数：

（1）首先判断 a 或 b 的值，如果 a=0，b 就是最大公约数；如果 b=0，a 就是最大公约数，从而可以直接完成计算操作。如果 a 和 b 均不为 0，则执行下一步。

（2）完成如下赋值：$a_1=a$、$b_1=b$、$c_1=1$。

（3）判断 a_n 和 b_n 是否为偶数，若都是偶数，则使 $a_{n+1}=a_n/2$，$b_{n+1}=b_n/2$，$c_{n+1}=c_n*2$。如果为断 a_n 和 b_n 中包含一个奇数，则执行步骤（4）、（5）或（6）。

（4）若 a_n 是偶数，b_n 是奇数，则完成如下赋值：$a_{n+1}=a_n/2$，$b_{n+1}=b_n$，$c_{n+1}=c_n$。

（5）若 b_n 是偶数，a_n 是奇数，则完成如下赋值：$b_{n+1}=b_n/2$，$a_{n+1}=a_n$，$c_{n+1}=c_n$。

（6）若 a_n 和 b_n 都是奇数，完成如下赋值：$a_{n+1}=|a_n-b_n|$，$b_{n+1}=\min(a_n,b_n)$，$c_{n+1}=c_n$。

（7）n 累加 1，跳转到第 3 步进行下一轮运算。

以上面算法的执行过程中，反复用到除 2 和乘 2 的操作。其实乘 2 只需要将二进制整数左移一位，而除 2 只需要将二进制整数右移一位即可，这样程序的执行效率更高。

我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int gcd(int a, int b)                          //最大公约数
{
    int m,n,r;

     if(a>b)                                   //m 保存较大数,n 保存较小数
     {
          m=a;
          n=b;
     }
     else
     {
          m=b;
          n=a;
     }
   if(n==0)                                    //若较小数为 0
   {
       return m;                               //返回另一数为最大公约数
   }
   if(m%2==0 && n%2 ==0)                       //m 和 n 都是偶数
   {
       return 2*gcd(m/2,n/2);                  //递归调用 gcd 函数，将 m、n 都除以 2
   }
   if ( m%2 == 0)                              //m 为偶数
   {
```

```
        return gcd(m/2,n);                    //递归调用 gcd 函数，将 m 除以 2
    }
    if ( n%2==0 )                             //n 为偶数
    {
        return gcd(m,n/2);                    //递归调用 gcd 函数，将 n 除以 2
    }
    return gcd((m+n)/2,(m-n)/2);              //m、n 都是奇数，递归调用 gcd
}
```

在这里，输入参数为两个自然数 a 和 b，a 和 b 谁大谁小没有要求。程序开始时首先判断 a 和 b 的大小，从而为 m 和 n 赋值。m 保存较大数，n 保存较小数。接着，按照 Stein 算法的思路来计算最大公约数。读者可以对照代码和算法思路来加深理解。

8.6.3 计算最大公约数示例

下面我们通过一个完整的例子来看看计算最大公约数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-5】

```
import java.util.Scanner;

public class P9_5
{
    static int gcd(int a, int b)              //最大公约数
    {
        int m,n,r;
        if(a>b)                               //m 保存较大数,n 保存较小数
        {
            m=a;
            n=b;
        }
        else
        {
            m=b;
            n=a;
        }
        r=m%n;                                //求余数
        while(r!=0)                           //辗转相除
        {
            m=n;
            n=r;
            r=m%n;
        }
        return n;                             //返回最大公约数
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int a,b,c;
        System.out.printf("输入两个正整数:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        a=input.nextInt();
        b=input.nextInt();  //输入数据
        c=gcd(a,b);
        System.out.printf("%d 和%d 的最大公约数:%d\n",a,b,gcd(a,b));
    }
}
```

在该程序，首先由用户输入两个数据，然后调用 gcd 算法来求最大公约数。这里采用的是欧几里德的辗转相除法，当然读者也可以采用 Stein 算法来求解最大公约数。该程序执行的结果，如图 8-6 所示。

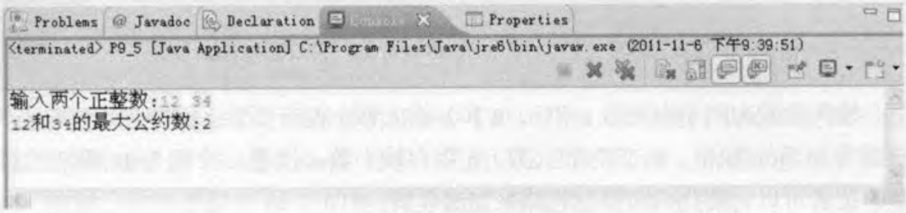


图 8-6　执行结果

8.7　最小公倍数

最大公约数和最小公倍数是相互关联的。我们知道如果有一个自然数 a 能被自然数 b 整除，则称 a 为 b 的倍数，b 为 a 的约数。而对于几个整数来说，其共有的倍数成为公倍数。而公倍数中最小的一个，也就是最小公倍数（Least Common Multiple，缩写 L.C.M.）。

计算最小公倍数的算法比较简单，前面有了两数最大公约数，则将两数相乘的积除以最大公约数便可得到两数的最小公倍数。对于多个自然数可以执行多次算法来得到。

我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int lcm(int a,int b)                    //最小公倍数
{
    int c,d;

     c= gcd(a,b);                       //获取最大公约数
     d=(a*b)/c;
    return d;                           //返回最小公倍数
}
```

下面我们通过一个完整的例子来看看计算最小公约数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-6】

```
import java.util.Scanner;

public class P8_6
{
    static int gcd(int a, int b)        //最大公约数
    {
        int m,n;

        if(a>b)                         //m 保存较大数,n 保存较小数
        {
            m=a;
            n=b;
        }
        else
        {
            m=b;
            n=a;
        }
```

```
        if(n==0)                        //若较小数为 0
        {
            return m;                   //返回另一数为最大公约数
        }
        if(m%2==0 && n%2 ==0)           //m 和 n 都是偶数
        {
            return 2*gcd(m/2,n/2);      //递归调用 gcd 函数，将 m、n 都除以 2
        }
        if ( m%2 == 0)                  //m 为偶数
        {
            return gcd(m/2,n);          //递归调用 gcd 函数，将 m 除以 2
        }
        if ( n%2==0 )                   //n 为偶数
        {
            return gcd(m,n/2);          //递归调用 gcd 函数，将 n 除以 2
        }
        return gcd((m+n)/2,(m-n)/2);    //m、n 都是奇数，递归调用 gcd
    }

    static int lcm(int a,int b) //最小公倍数
    {
        int c,d;

        c= gcd(a,b);                    //获取最大公约数
        d=(a*b)/c;
        return d;                       //返回最小公倍数
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int a,b,c,d;
        System.out.printf("输入两个正整数:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        a=input.nextInt();
        b=input.nextInt();              //输入整数
        c=gcd(a,b);                     //最大公约数
        System.out.printf("%d 和%d 的最大公约数:%d\n",a,b,c);
        d=lcm(a,b);                     //最小公倍数
        System.out.printf("%d 和%d 的最小公倍数:%d\n",a,b,d);
    }
}
```

在该程序，首先由用户输入两个数据，然后调用 gcd 算法来求最大公约数，调用 lcm 算法来求最小公倍数。在计算最大公约数时，这里采用的是 Stein 算法，当然读者也可以采用欧几里德的辗转相除法来求解最大公约数。而最小公倍数的算法都是一样的。该程序执行的结果，如图 8-7 所示。

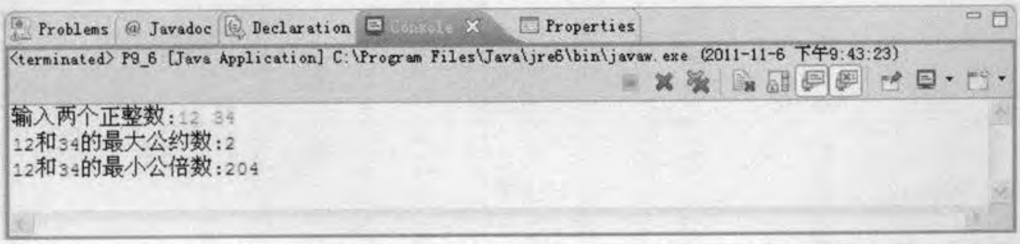


图 8-7 执行结果

8.8 素　　数

素数中初等数论中重点研究的对象，早在公元前 300 年，当时古希腊著名数学家欧几里得发现了数论的本质是素数。欧几里得在其最伟大的著作《几何原本》中，证明了素数具有无穷多个。

8.8.1 什么是素数

素数又称为质数，指在一个大于 1 的自然数中，除了 1 和此整数自身外，没法被其他自然数整除的数。比 1 大，但不是素数的称之为合数。而对于 0 和 1 来说，它们既不是素数也不是合数。

素数的分布没有很明显的规律，但引发了很多伟大的数学家对其研究。例如，最早的欧几里德、17 世纪法国的费尔马、法国的梅森等。

谈到素数，关于著名的算术基本定理：任何一个大于 1 的正整数 n，可以唯一表示成有限个素数的乘积。

围绕着素数，数学家提出了各种猜想，例如：

- 黎曼猜想：黎曼研究发现，素数分布的绝大部分猜想都取决于黎曼 zeta 函数的零点位置。黎曼在此基础上，猜想那些非平凡零点都落在复平面中实部为 1/2 的直线上。
- 孪生素数猜想：对于素数 n，如果 n+2 同样为素数，则称 n 和 n+2 为孪生素数。到底有没有无穷多个孪生素数呢？这是一个至今仍无法解决的问题。
- 哥德巴赫猜想：哥德巴赫通过大量的数据猜测，所有不小于 6 的偶数，都可以表示为两个奇素数之和。后人将其称为“1+1”。并且，对于每个不小于 9 的奇数，都可以表示为三个奇素数之和。哥德巴赫猜想是数学中的璀璨明珠，至今仍无实质性进展。

近年来，素数在密码学上又发现了新的应用。基于大的素数质因数分解的复杂性，从而构造出来广泛应用的公钥密码。这是现代密码学的基础，是密码学领域激动人心的进步。

8.8.2 计算素数算法

素数的分布没有明显的规律。这里，我们没有很好的办法来判断素数。我们一般根据素数的定义，来分析数值不大的数是否为素数。

我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int isPrime(int a)
{                                          //判断 a 是否是素数，是素数返回 1，不是素数返回 0
    int i;
    for(i=2;i<a;i++)
    {
        if(a % i == 0)
        {
            return 0;                      //不是素数
        }
    }
    return 1;                              //是素数
}
```

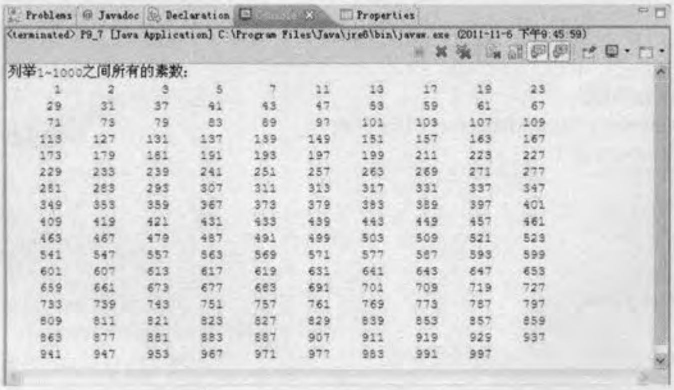
在这里，输入参数 a 为待判断的数据。程序中，计算 a 除以小于 a 的数的余数，如果余数为 0 表示不是素数，方法返回 0。如果无法整除，则返回 1，表示该数据是素数。

下面我们通过一个完整的例子来看看计算素数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-7】

```
public class P9_7
{
    static int isPrime(int a)              //素数算法
    {
        int i;
        for(i=2;i<a;i++)
        {
            if(a % i == 0)
            {
                return 0;                  //不是素数
            }
        }
        return 1;                          //是素数
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int i,n,count;
        n=1000;                            //范围
        count=0;
        System.out.printf("列举 1~1000 之间所有的素数：\n");
        for(i=1;i<1000;i++)
        {
            if(isPrime(i)==1)              //如果是素数
            {
                System.out.printf("%7d",i);
                count++;
                if(count%10==0)//10 个一行
                {
                    System.out.printf("\n");
                }
            }
        }
        System.out.printf("\n");
    }
}
```

在该程序，首先初始化计算的范围为 1000，也就是列举 1000 以内的所有素数。程序中调用 isPrime()方法来判断，最后输出时按照 10 个一行来显示素数。该程序执行的结果，如图 8-8 所示。



1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	

图 8-8 执行结果

8.9 回 文 素 数

回文素数是一种具有特殊性质的素数，其既是素数又是回文数。而所谓回文数，就是从左向右读与从右向左读是完全一样的自然数，例如：11、22、101、222、818、12321 等。

回文数有点类似中国古代的回文诗，例如“雾锁山头山锁雾，天连水尾水连天”，这句诗无论正念还是反念都是一样的。

8.9.1 什么是回文素数

回文素数就是从左向右读与从右向左读是完全一样的素数。典型的回文素数如下：

11、101、131、151、181、191、313、……。

回文素数往往与记数系统的进位值有关。目前，数学家仍无法证明在十进制中是否包含有无限多个回文素数。

在其他进制中也有回文素数的概念，例如在二进制中，回文素数包括梅森素数和费马素书。

8.9.2 计算回文素数算法

在判断回文素数是，我们仍然从其定义出发。我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int huiwen(int n)                    //回文素数算法
{
    int temp,m,k,t,num,sum;
    int count,i;

    k=1;
    count=0;
    while(k>0)                       //判断位数
    {
        k=n-(int)Math.pow(10,count);
        count++;
    }
    m=count-1;                       //位数

    sum=0;
    num=n;
    for(i=0;i<m;i++)                 //按位处理，交换高低位
    {
        temp=num%10;
        sum=sum+temp*((int)Math.pow(10,m-1-i));
        num=(num-temp)/10;
    }
    t=sum;
    if(t==n)
    {
        if(isPrime(n)==1)
        {
            return 1;                //是回文素数
        }
        else
```

```
            {
                return 0;
            }
        }
        else
        {
            return 0;
        }
}
```

在这里，输入参数 n 为待判断的数据。程序中首先判断其是否为回文数，然后进一步判断其是否为素数。如果既是回文数又是素数则返回 1，表示该数据是回文素数；否则，将返回 0，表示该数据不是回文素数。在判断回文数时，首先判断位数，然后交换高低位得到另一个数据，如果这两个数据相等，则表示该数据为回文数。

下面我们通过一个完整的例子来看看计算回文素数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-8】

```
public class P9_8
{
    static int isPrime(int a)                    //素数算法
    {
        int i;
        for(i=2;i<a;i++)
        {
            if(a % i == 0)
            {
                return 0;                        //不是素数
            }
        }
        return 1;                                //是素数
    }

    static int huiwen(int n)                     //回文素数算法
    {
        int temp,m,k,t,num,sum;
        int count,i;

        k=1;
        count=0;
        while(k>0)                               //判断位数
        {
            k=n-(int)Math.pow(10,count);
            count++;
        }
        m=count-1;                               //位数

        sum=0;
        num=n;
        for(i=0;i<m;i++)                         //按位处理，交换高低位
        {
            temp=num%10;
            sum=sum+temp*((int)Math.pow(10,m-1-i));
            num=(num-temp)/10;
        }
        t=sum;
```

```
            if(t==n)
            {
                if(isPrime(n)==1)
                {
                    return 1;                   //是回文素数
                }
                else
                {
                    return 0;
                }
            }
            else
            {
                return 0;
            }
        }
        public static void main(String[] args)
        {
            int i,count;

            count=0;
            System.out.printf("列举 0~50000 之间的回文素数\n");
            for(i=10;i<50000;i++)               //列举回文素数
            {
                if(huiwen(i)==1)
                {
                    System.out.printf("%7d",i);
                    count++;
                    if(count%10==0)         //10 个为一行
                    {
                        System.out.printf("\n");
                    }
                }
            }
            System.out.printf("\n");
        }
}
```

在该程序，列举 50000 以内的所有回文素数。程序中调用 huiwen()方法来判断，最后输出时按照 10 个一行来显示回文素数。该程序执行的结果，如图 8-9 所示。

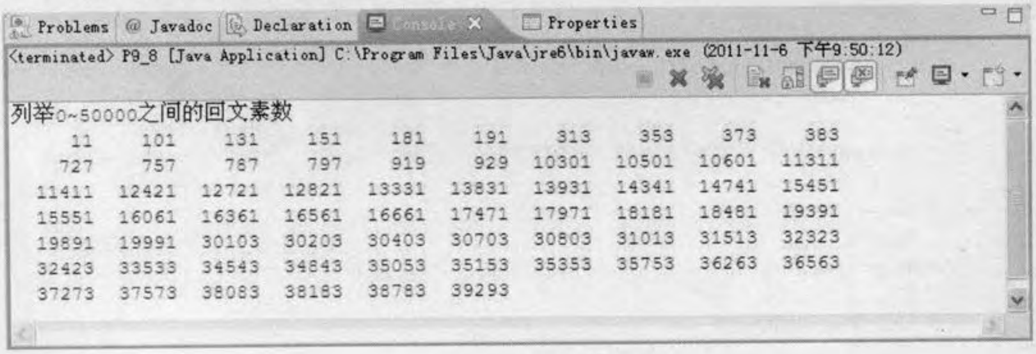


图 8-9　执行结果

8.10 平方回文数

平方回文数也是一个回文数，只不过其有自身的特殊性质，在数学中研究的也是比较多的。

8.10.1 什么是平方回文数

平方回文数是一个回文数，这个回文数可以表示成某个自然数的平方的形式。也就是说，一个自然数 n 的平方，得到一个平方回文数。

典型的平方回文数，示例如下：

121=11*11

484=22*22

676=26*26

……

像这样的平方回文数还有很多，本节就来看看如何计算平方回文数。

8.10.2 计算平方回文数算法

计算平方回文数的基本思路就是按照其定义，按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
int pingfanghuiwen(int a)                              //算法
{
    int temp,m,k,t,num,sum;
    int count,i,n;

    n=a*a;
    k=1;
    count=0;
    while(k>0)                                         //判断位数
    {
        k=n-(int)Math.pow(10,count);
        count++;
    }
    m=count-1;                                         //位数

    sum=0;
    num=n;
    for(i=0;i<m;i++)                                   //按位处理，交换高低位
    {
        temp=num%10;
        sum=sum+temp*((int)Math.pow(10,m-1-i));
        num=(num-temp)/10;
    }
    t=sum;
    if(t==n)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
```

```
        return 0;
    }
}
```

在这里，输入参数 a 为一个自然数。程序中首先计算 a 的平方，然后判断 a 的平方是否为回文数。如果是回文数，则返回 1；否则将返回 0。在判断回文数的时候，采取了和前面类似的算法。

下面我们通过一个完整的例子来看看计算平方回文数算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-9】

```
public class P9_9
{
    static int pingfanghuiwen(int a)                    //算法

        int temp,m,k,t,num,sum;
        int count,i,n;

        n=a*a;
        k=1;
        count=0;
        while(k>0)                                      //判断位数
        {
            k=n-(int)Math.pow(10,count);
            count++;
        }
        m=count-1;                                      //位数
        sum=0;
        num=n;
        for(i=0;i<m;i++)                                //按位处理，交换高低位
        {
            temp=num%10;
            sum=sum+temp*((int)Math.pow(10,m-1-i));
            num=(num-temp)/10;
        }
        t=sum;
        if(t==n)
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            return 0;
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int i;
        System.out.printf("列举平方回文素数\n");
        for(i=10;i<1000;i++)
        {
            if(pingfanghuiwen(i)==1)                    //列举平方回文数
            {
                System.out.printf("%d*%d=%d\n",i,i,i*i);
            }
        }
    }
}
```

在该程序中，判断 1000 以内的数的平方是否为回文素数。程序中调用 pingfanghuiwen()方法来判断，最后输出时同时显示了平方回文数及其平方表示。该程序执行的结果，如图 8-10 所示。

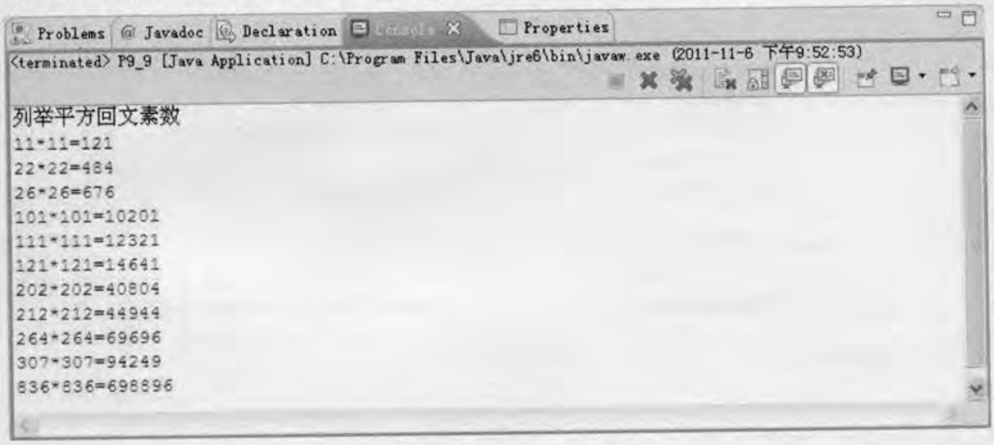


图 8-10　执行结果

8.11　分解质因数

在初等数论中，我们知道任何一个合数都可以写成几个质数相乘的形式，这几个质数都叫做这个合数的质因数。例如 24=2*2*2*3。分解质因数就是把一个合数写成几个质数相乘的形式表示。对于一个质数，它的质因数可定义为它本身。

因此，我们可以按照如下算法来对一个数 n 分解质因数：

（1）在 2~n-1 之间找出 n 的两个因数（不一定是质因数）i 和 j，即 i*j=n。

（2）如果 i 是质数，则 i 一定是 n 的一个质因数，否则继续对 i 进行质因数分解。

（3）如果 j 是质数，则 j 一定是 n 的一个质因数，否则继续对 j 进行质因数分解。

按照这种方法，对 24 进行质因数分解，分解的示意过程，如图 8-11 所示。

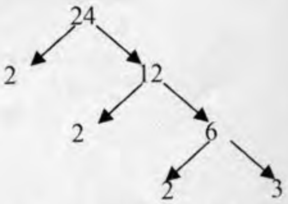


图 8-11　质因数分解过程

对上述过程进一步分析，很显然这是一种递归的方法。在这个递归的过程中，如果对 k 进行质因数分解，只有当 k 的质因数 s、t 全部找到后，这一层的调用才会结束，返回上一层的调用中。否则会将 s 或 t 中非质数的那个因数作为参数，继续调用这个递归过程进行分解。因此，一旦执行完这个递归的调用，一定能够求出 n 的全部质因数。

我们按照这个思路可以编写相应的算法，程序代码示例如下：

```
void PrimeFactor(int n)          //分解质因数算法
{
    int i;
    if(isPrime(n)==1)
     {
        System.out.printf("%d*",n);
     }
    else
```

```
    {
        for(i=2;i<n;i++)
        {
            if(n % i == 0)
            {
                    System.out.printf("%d*",i);          //第一个因数一定是质因数
                    if(isPrime(n/i)==1)
                    {                                    //判断第二个因数是否是质数
                        System.out.printf("%d",n/i);
                        break;                           //找到全部质因子
                    }
                else
                    {
                    PrimeFactor(n/i);                    //递归地调用 PrimeFactor 分解 n/i
                    }
            break;
            }
        }
    }
}
```

在该程序中，输入参数 n 为待进行质因数分解的数据。在这里，严格遵照了前面的算法过程。读者可以对照算法和程序来加深理解。

下面我们通过一个完整的例子来看看计算质因数分解算法的应用，完整的程序代码示例如下：

【程序 8-10】

```
import java.util.Scanner;
public class P9_10
{
    static int isPrime(int a)                            //判断素数算法
    {
        int i;
        for(i=2;i<a;i++)
        {
            if(a % i == 0)
            {
                return 0;                                //不是质数
            }
        }
        return 1;                                        //是质数
    }

    static void PrimeFactor(int n)                       //分解质因数算法
    {
        int i;
        if(isPrime(n)==1)
        {
            System.out.printf("%d*",n);
        }
        else
        {
            for(i=2;i<n;i++)
            {
                if(n % i == 0)
                {
                    System.out.printf("%d*",i);          //第一个因数一定是质因数
```

```
                    if(isPrime(n/i)==1)
                        {                    //判断第二个因数是否是质数
                        System.out.printf("%d",n/i);
                        break;               //找到全部质因子
                    }
                    else
                        {
                        PrimeFactor(n/i); //递归地调用 PrimeFactor 分解 n/i
                        }
                break;
                }
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
         int n;
        System.out.printf("请首先输入一个数 n: \n")  ;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();
        System.out.printf("n=%d=",n);
        PrimeFactor(n);                      //对 n 分解质因数
    }
}
```

在该程序，首先由用户输入一个数 n，然后调用 PrimeFactor()方法对 n 进行分解质因数。该程序执行的结果，如图 8-12 所示。

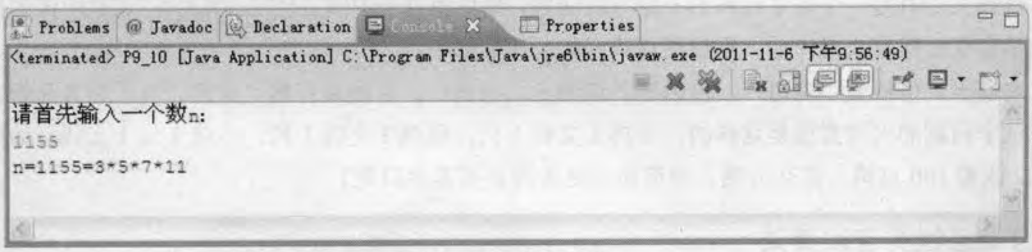


图 8-12　执行结果

8.12　小　　结

初等数论问题是算法的一个很好的练兵场。本章首先介绍了一些基本的数论知识，然后对初等数论中十分基础且被广泛研究的完全数、亲密数、水仙花数、自守数、最大公约数、最小公倍数、素数、回文素数、平方回文数和分解质因数进行了介绍。在介绍这些内容的时候，不仅给出了相应的算法，还对相应的数学知识进行讲解。从而使读者更加明白算法的意义，增加读者的兴趣。

第 9 章 算法经典趣题

算法其实是一门很古老的学科，经过历史的发展，积累了很多非常经典的算法问题。这些经典的算法问题是难得的知识财富，我们通过学习这些算法经典趣题，不仅可以锻炼程序设计能力，也可以拓展思路，提高学习算法的兴趣。本章将介绍这些典型的算法问题。

9.1 百钱买百鸡

百钱买百鸡是一个非常经典的不定方程问题，最早源自于中国古代的《算经》，这是中国古代著名数学家张丘建首次提出的。百钱买百鸡问题的原文如下：

鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一，百钱买百鸡，问翁、母、雏各几何？

这个问题的大致意思是这样的，公鸡 5 文钱 1 只，母鸡 3 文钱 1 只，小鸡 3 只 1 文钱，如果用 100 文钱买 100 只鸡，那么公鸡、母鸡和小鸡各应该买多少只呢？

9.1.1 百钱买百鸡算法

百钱买百鸡问题中，有三个变量：公鸡数量、母鸡数量和小鸡数量，我们分别设为 x、y 和 z。这三者应该满足如下关系：

$x+y+z=100$

$5x+3y+z/3=100$

这里三个变量却只有两个方程，因此是一个不定方程问题。这将导致求解的结果不止一个。我们可以根据上述两个方程来穷尽所有可能的结果。

为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算 m 钱买 n 鸡问题。当 m=100，n=100 时，这个算法正好是求解百钱买百鸡问题。算法的示例代码如下：

```
void BQBJ(int m,int n)                    //百钱买百鸡算法
{
    int x,y,z;
    for(x=0;x<=n;x++)                     //公鸡数量
    {
        for(y=0;y<=n;y++)                 //母鸡数量
```

```
        {
            z=n-x-y;                            //小鸡数量
            if (z>0 && z%3==0 && x*5+y*3+z/3==m)
            {
                System.out.printf("公鸡：%d 只,母鸡：%d 只,小鸡：%d 只\n",x,y,z);
            }
            else                                //无法求解!
            {
            }
        }
    }
}
```

在这里，输入参数 m 为钱数，输入参数 n 为购买的鸡数。程序中，通过两层循环来穷尽公鸡数量和母鸡数量，然后在 if 语句中判断是否满足方程的条件。如果满足条件，则表示是一种解，将其输出。

9.1.2 百钱买百鸡求解

有了上述通用的百钱买百鸡算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的百钱买百鸡问题求解程序代码：

【程序 9-1】

```
public class p10_1
{
    static void BQBJ(int m,int n)               //百钱买百鸡算法
    {
        int x,y,z;
        for(x=0;x<=n;x++)                       //公鸡数量
        {
            for(y=0;y<=n;y++)                   //母鸡数量
            {
                z=n-x-y;                        //小鸡数量
                if (z>0 && z%3==0 && x*5+y*3+z/3==m)
                {
                    System.out.printf("公鸡：%d 只,母鸡：%d 只,小鸡：%d 只\n",x,y,z);
                }
                else                            //无法求解!
                {
                }
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int m,n;

        m=100;                                  //百钱
        n=100;                                  //百鸡
        System.out.printf("%d 钱买%d 鸡问题的求解结果为：\n",m,n);
        BQBJ(m,n);
    }
}
```

在主程序中，首先初始化 m=100，表示 100 钱，n=100，表示 100 只鸡。然后调用 BQBJ()方法来求解百钱买百鸡问题，输出所有可能的结果。执行该程序，得到如下结果，如图 9-1 所示。

从结果可以看出，共有如下 4 种可能的购买方案：

- 公鸡购买 0 只，母鸡购买 25 只，小鸡购买 75 只；
- 公鸡购买 4 只，母鸡购买 18 只，小鸡购买 78 只；
- 公鸡购买 8 只，母鸡购买 11 只，小鸡购买 81 只；
- 公鸡购买 12 只，母鸡购买 4 只，小鸡购买 84 只；

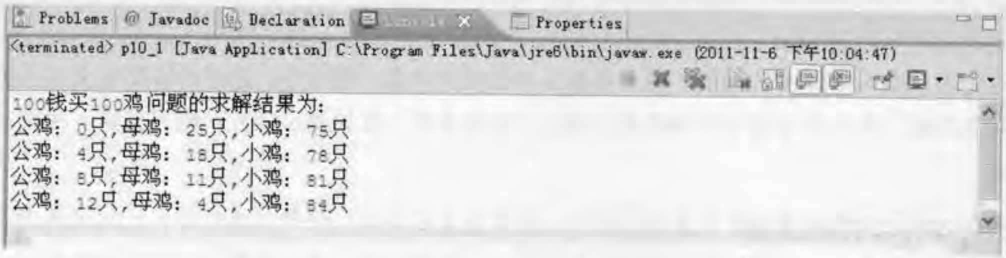


图 9-1　执行结果

9.2　五家共井

五家共井记载于中国古代的数学专著《九章算术》。五家共井问题的原文如下：

今有五家共井，甲二绠不足如乙一绠，乙三绠不足如丙一绠，丙四绠不足如丁一绠，丁五绠不足如戊一绠，戊六绠不足如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何？

这里，“绠”就是汲水桶上的绳索，“逮”就是到达井底水面的意思。这个问题的大致意思是这样的，现在有五家共用一口井，甲、乙、丙、丁、戊五家各有一条绳子汲水：甲绳×2+乙绳=井深，乙绳×3+丙绳=井深，丙绳×4+丁绳=井深，丁绳×5+戊绳=井深，戊绳×6+甲绳=井深，求甲、乙、丙、丁、戊各家绳子的长度和井深。

9.2.1　五家共井算法

我们首先分析一下问题，设甲、乙、丙、丁、戊各家绳子的长度分别为 len1、len2、len3、len4、len5，井深为 len，则前述问题五家共井的条件可表示为下面的方程：

len1×2+len2=len

len2×3+len3=len

len3×4+len4=len

len4×5+len5=len

len5×6+len1=len

由于这里有 6 个未知数，但只有 5 个方程。因此，这是一个不定方程问题，可能存在多个求解结果。我们可以进一步限定绳长和井深都是整数，来求解一个最小的整数结果。我们对上面几个式子进行变形，得到如下结果：

len1×2+len2=len2×3+len3=len3×4+len4=len4×5+len5=len5×6+len1

len1=len2+len3/2

len2=len3+len4/3

len3=len4+len5/4

len4=len5+len1/5

由此，可以看出如下几点：

- len3 能被 2 整除，len3 必为 2 的倍数；
- len4 能被 3 整除，len4 必为 3 的倍数；
- len5 能被 4 整除，len5 必为 4 的倍数；
- len1 能被 5 整除，len1 必为 5 的倍数。

我们可以按照这个倍数规则来求解。相应的五家共井算法的示例代码如下：

```
void WJGJ(int[] len1,int[] len2,int[] len3,int[] len4,int[] len5,int[] len)
                                                    //五家共井算法
{
    for(len5[0]=4; ;len5[0]+=4)                     //len5 为 4 的倍数

        for(len1[0]=5; ;len1[0]+=5)                 //len1 为 5 的倍数
        {
            len4[0]=len5[0]+len1[0]/5;
            len3[0]=len4[0]+len5[0]/4;

            if(len3[0]%2!=0||len4[0]%3!=0)
    continue;                                       //如果不能被 2 整除或若不能被 3 整除，进行下一次循环
            len2[0]=len3[0]+len4[0]/3;
            if(len2[0]+len3[0]/2<len1[0])
                break;                              //切回 len5[0]循环(因为 x 太大了)
            if(len2[0]+len3[0]/2==len1[0])
            {
                len[0]=2*(len1[0])+(len2[0]); //计算井深
                return;
            }
        }
}
```

在这里，输入参数 len1、len2、len3、len4、len5 分别为指向甲、乙、丙、丁、戊各家绳子的长度的引用，输入参数 len 为指向井深的引用。程序中，根据前面总结的倍数关系，来逐个验算满足条件的数据。这里采用引用的好处是便于返回各个数据的值。

9.2.2 五家共井求解

理解了上述五家共井的求解算法后，这里给出完整的五家共井问题求解程序代码：

【程序 9-2】

```
public class P10_2
{
    static void WJGJ(int[] len1,int[] len2,int[] len3,int[] len4,int[] len5,int[] len)//五家共井算法
    {
        for(len5[0]=4; ;len5[0]+=4)                 //len5 为 4 的倍数

            for(len1[0]=5; ;len1[0]+=5)             //len1 为 5 的倍数
            {
                len4[0]=len5[0]+len1[0]/5;
```

```
                len3[0]=len4[0]+len5[0]/4;

                if(len3[0]%2!=0||len4[0]%3!=0)
            continue;                    //如果不能被 2 整除或若不能被 3 整除，进行下一次循环

                len2[0]=len3[0]+len4[0]/3;
                if(len2[0]+len3[0]/2<len1[0])
                    break;                               //切回 len5[0]循环(因为 x 太大了)

                if(len2[0]+len3[0]/2==len1[0])
                {
                    len[0]=2*(len1[0])+(len2[0]);              //计算井深
                    return;
                }
            }


    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] len1={0};
        int[] len2={0};
        int[] len3={0};
        int[] len4={0};
        int[] len5={0};
        int[] len={0};

        WJGJ(len1,len2,len3,len4,len5,len);                      //求解算法

       System.out.printf("五家共井问题求解结果如下:\n");          //输出结果
       System.out.printf("甲家井绳长度为:%d\n",len1[0]);
       System.out.printf("乙家井绳长度为:%d\n",len2[0]);
       System.out.printf("丙家井绳长度为:%d\n",len3[0]);
       System.out.printf("丁家井绳长度为:%d\n",len4[0]);
       System.out.printf("戊家井绳长度为:%d\n",len5[0]);
       System.out.printf("井深:%d\n",len[0]);
    }
}
```

在主程序中，首先初始化甲、乙、丙、丁、戊各家绳子的长度为 0，井深为 0。然后调用 WJGJ() 方法来求解五家共井问题。这里传入方法的是各个变量的地址。这样，求解的结果将保存在各个变量中。最后，程序输出求解的结果。

执行这个程序，得到如下结果，如图 9-2 所示。

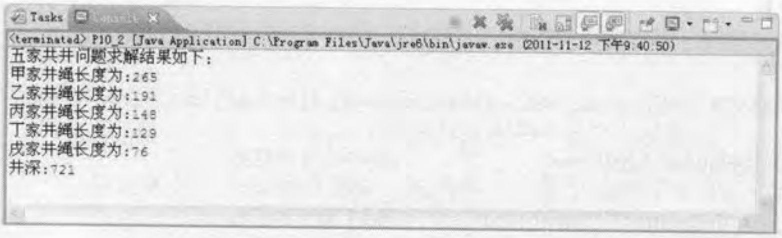


图 9-2　执行结果

从结果可以看出，甲家井绳长度为 265，乙家井绳长度为 191，丙家井绳长度为 148，丁家井绳长度为 129，戊家井绳长度为 76，井深为 721。

当然，由于这是一个不定方程，满足相应的倍数关系仍然是该方程的解。

9.3 鸡兔同笼

鸡兔同笼问题最早记载于 1500 年前的《孙子算经》，这是我国古代一个非常有名的问题。鸡兔同笼的原文如下：

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？

这个问题的大致意思是：在一个笼子里关着若干只鸡和若干只兔，从上面数共有 35 个头；从下面数共有 94 只脚。问笼中鸡和兔的数量各是多少？

9.3.1 鸡兔同笼算法

我们首先分析一下鸡兔同笼问题。一只鸡有一个头和两只脚，一只兔有一个头和 4 只脚。这样，如果假定都是鸡，那么每个头对应两只脚。如此推算，35 个头对应 70 只脚，但是这里共有 94 只脚。因此，剩余的脚就是兔子的另外两只脚。只需将剩余的脚除以 2 便得到兔子的数量。有了兔子的数量，便可以轻松计算得到鸡的数量。

为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算鸡兔同笼问题。算法的示例代码如下：

```
void JTTL(int head,int foot,int[] tu,int[] ji)
{
    tu[0]=(foot-2*head)/2;                    //兔子的数量
    ji[0]=head-tu[0];                         //鸡的数量
}
```

这里，输入参数 head 为笼中的头数，输入参数 foot 为笼中的脚数，输入参数 tu 为指向兔子数量的引用，输入参数 ji 为指向鸡数量的引用。这里采用引用来保存鸡和兔的数量，便于返回结果。

程序中，用总脚数 foot 减去鸡脚数 2*head 得到兔子的数量，用总头数减去兔子数，剩余的就是鸡数量。当 head=35，foot=94 时，这个正好求解鸡兔同笼问题。

9.3.2 鸡兔同笼求解

有了上述通用的鸡兔同笼算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的鸡兔同笼问题求解程序代码：

【程序 9-3】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_3
{
    static void JTTL(int head,int foot,int[] tu,int[] ji)
    {
        tu[0]=(foot-2*head)/2;                    //兔子的数量
        ji[0]=head-tu[0];                         //鸡的数量
    }
    public static void main(String[] args)
    {
```

```
            int[] ji={0},tu={0};
            int head,foot;

           System.out.printf("鸡兔同笼问题求解!\n");
            System.out.printf("输入头数:");
           Scanner input=new Scanner(System.in);
            head=input.nextInt();                          //输入头数
           System.out.printf("输入脚数:");
           foot=input.nextInt();                           //输入脚数

            JTTL(head,foot,tu,ji);

           System.out.printf("鸡有:%d 只,兔子有:%d 只。\n",ji[0],tu[0]);
        }
}
```

在主方法中，首先要求用户输入笼中的头数和脚数，然后调用 JTT()方法来求解鸡兔同笼问题，最后输出结果。当输入头数 35，脚数 94 时，这个正好求解鸡兔同笼问题。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-3 所示。由此可知，笼中有 23 只鸡和 12 只兔子。

图 9-3　执行结果

9.4　猴 子 吃 桃

猴子吃桃问题是一个典型的递归算法的问题。猴子吃桃问题的大意如下：

某天一只猴子摘了一堆桃子，具体多少它没有数。猴子每天吃了其中的一半然后再多吃了一个，第二天则吃剩余的一半然后再多吃一个，……，直到第 10 天，猴子发现只有 1 个桃子了。问这只猴子在第一天摘了多少个桃子？

9.4.1　猴子吃桃算法

我们先来分析一个猴子吃桃问题。这只猴子共用了 10 天吃桃子，只知道最后一天剩余 1 个桃子，要想求出第 1 天剩余的桃子数，就先要求出第 2 天剩余的桃子数，……。假设 a_n 表示第 n 天剩余的桃子数量，n=1~10，则有如下关系：

$a_1=(a_2+1)\times 2;$

$a_2=(a_3+1)\times 2;$

……

$a_9=(a_{10}+1)\times 2;$

$a_{10}=1;$

从上述的式子可知，只能通过倒推来求得第一天的桃子数。这在程序上就需要借助于递归算法。为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算猴子吃桃问题。算法的示例代码如下：

```
int peach(int n)                          //猴子吃桃算法
{
int pe;
    if(n==1)
    {
       return 1;                          //第 10 天就只剩 1 个了
    }
   else
    {
         pe=(peach(n-1)+1)*2;             //前一天总比后 1 天多一半加 1
    }
   return pe;
}
```

这里，输入参数 n 为猴子吃桃的天数。程序中通过递归调用 peach()方法来计算第一天的桃子数量，其中之间关键的关系是前一天总比后 1 天多一半加 1。当 n=10 时，这就是上述的猴子吃桃问题。

9.4.2 猴子吃桃求解

有了上述通用的猴子吃桃算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的猴子吃桃问题求解程序代码：

【程序 9-4】

```
import java.util.Scanner;

public class p10_4
{
    static int peach(int n)                       //猴子吃桃算法
    {
        int pe;
       if(n==1)
        {
           return 1;                              //第 10 天就只剩 1 个了
        }
       else
        {
             pe=(peach(n-1)+1)*2;                 //前一天总比后 1 天多一半加 1
        }
       return pe;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int n;                                    //天数
       int peachnum;                              //最初桃子数

       System.out.printf("猴子吃桃问题求解！ \n");
        System.out.printf("输入天数:");
       Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();

       peachnum=peach(n);                         //求解
```

```
            System.out.printf("最初的桃子数为:%d 个。\n",peachnum);
        }
    }
```

在该程序中，主方法首次由用户输入猴子吃桃的天数，然后调用 peach()方法求解猴子吃桃问题，最后输出结果。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-4 所示。由此可知猴子在第一天摘了 1534 个桃子。

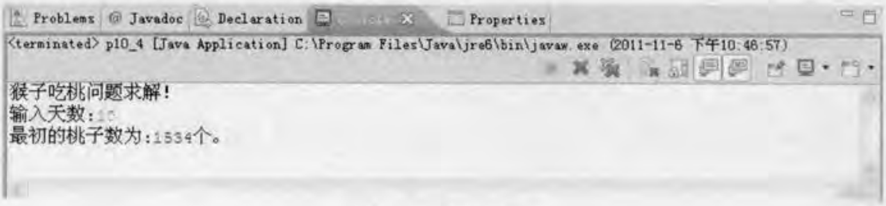


图 9-4 执行结果

9.5 舍罕王赏麦

舍罕王赏麦问题是古印度非常著名的一个级数求和问题。舍罕王赏麦问题的大意如下：

传说国际象棋的发明者是古印度的西萨•班•达依尔，那时的国王是舍罕，世人称为舍罕王。当时舍罕王比较贪玩，位居宰相的西萨•班•达依尔便发明了国际象棋献给舍罕王。舍罕王非常喜欢，为了奖励西萨•班•达依尔，便许诺可以满足他提出的任何要求。

西萨•班•达依尔灵机一动，指着 8×8=64 的棋盘说："陛下，请您按棋盘的格子赏赐我一点麦子吧，第 1 个小格赏我一粒麦子，第 2 个小格赏我两粒，第 3 个小格赏四粒，以后每一小格都比前一个小格赏的麦粒数增加一倍，只要把棋盘上全部 64 个小格按这样的方法得到的麦粒都赏赐给我，我就心满意足了。"

舍罕王觉得这是一个很小的要求，便满口答应了，命人按要求给西萨•班•达依尔准备麦子。但是，不久大臣计算的结果令舍罕王大惊失色。问题是：舍罕王需要赏赐出多少粒麦子呢？

9.5.1 舍罕王赏麦问题

我们先来分析一下舍罕王赏麦问题。国际象棋棋盘总共 8×8=64 格。按照西萨•班•达依尔的要求，每一格中放置的麦粒数量如下：

第 1 格：1 粒；

第 2 格：1×2=2 粒；

第 3 格：1×2×2=4 粒；

第 4 格：1×2×2×2=8 粒；

……

将每一格的麦子粒数加起来：

sum=1+2+4+8+……

一直重复到 64，将棋盘 8×8=64 格都计算完毕便可以计算出赏赐给西萨•班•达依尔总的麦粒数。如果使用数学的语言来描述的话，上述式子可以表述为如下形式：

$$sum = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{64} = \sum_{i=1}^{64} 2^i$$

为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算舍罕王赏麦问题。算法的示例代码如下：

```
double mai(int n)                                //舍罕王赏麦算法
{
    int i;
    double temp,sum;

    temp=1;
    sum=0;                                       //总合

    for(i=1;i<=n;i++)                            //计算等比级数的和
    {
        temp=temp*2;
        sum=sum+temp;
    }
    return sum;
}
```

这里，输入参数 n 为棋盘总的格子数。程序中通过 for 循环来计算赏赐的总的麦粒数。程序中定义 sum 为 double 类型，这是因为这里运算结果是一个 20 位十进制的大数，在 Java 语言的基本数据类型中，只有 double 类型的数据可以容纳。由此可以看出赏赐数量的庞大。

9.5.2 舍罕王赏麦求解

有了上述通用的舍罕王赏麦算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的舍罕王赏麦问题求解程序代码：

【程序 9-5】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_5
{
    static double mai(int n)                     //舍罕王赏麦算法
    {
        int i;
        double temp,sum;

        temp=1;
        sum=0;                                   //总合

        for(i=1;i<=n;i++)                        //计算等比级数的和
        {
            temp=temp*2;
            sum=sum+temp;
        }
        return sum;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int n;
```

```
            double sum;
            System.out.printf("舍罕王赏麦问题求解！\n");
            System.out.printf("输入棋盘格总数:");
           Scanner input=new Scanner(System.in);
            n=input.nextInt();
            sum=mai(n);                              //求解
           System.out.printf("舍罕王赏总麦粒数为:%f 粒。\n",sum);
           System.out.printf("共:%.2f 吨。\n",sum/25000/1000);
    }
}
```

主方法中，首先由用户输入棋盘格总数，然后调用 mai()方法来求解舍罕王赏麦问题，最后输出结果。由于这里得到的是赏赐的麦子的粒数，为了更为明白，下面假定 25 000 粒麦子为 1 公斤，那么 25 000 000 粒麦子为 1 吨，经前述结果转化为吨数输出。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-5 所示。从这里可以看出，舍罕王需要赏赐的麦子总数是非常庞大的，大约为全世界在两千年内所生产的全部小麦总合。怪不得舍罕王大惊失色呢！

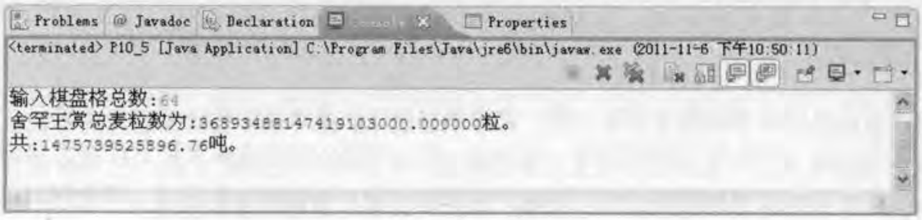


图 9-5　执行结果

9.6　汉　诺　塔

汉诺（Hanoi）塔源自于古印度，又称为河内塔。汉诺塔是非常著名的智力趣题，在很多算法书籍和智力竞赛中都有涉及。汉诺塔问题的大意如下：

勃拉玛是古印度的一个开天辟地的神，其在一个庙宇中留下了三根金刚石的棒，第一根上面套着 64 个大小不一的圆形金片。其中，最大的金片在最底下，其余的依次叠上去，且一个比一个小，如图 9-6 所示。勃拉玛要求众僧将该金刚石棒中的金片逐个地移到另一根棒上，规定一次只能移动一个金片，且金片在放到棒上时，大的只能放在小的下面，但是可以利用中间的一根棒作为辅助移动使用。

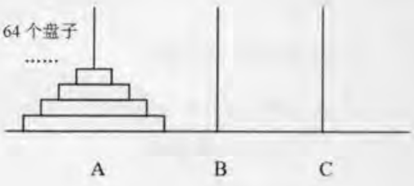


图 9-6　汉诺塔

9.6.1　汉诺塔算法

我们先来分析一下汉诺塔问题。汉诺塔问题是一个非常典型的递归算法问题，为了简单起见，我们先来考虑 3 个圆盘的情况。这里假设有 A、B、C 三根棒，初始状态时，A 棒上放着 3 个圆盘，将其移动到 C 棒上，可以使用 B 棒暂时放置圆盘，如图 9-7 所示。并且规定一次只能移动一个圆盘，且圆盘在放到棒上时，大的只能放在小的下面。

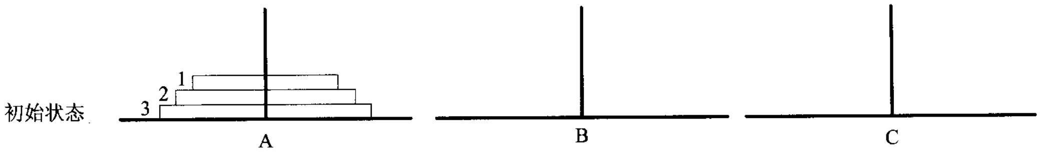


图 9-7　3 个圆盘的汉诺塔

使用递归的思想，可以采用如下的步骤来完成圆盘的移动：

（1）将 A 棒上的两个圆盘（圆盘 1 和圆盘 2）移到 B 棒上，如图 9-8 所示。

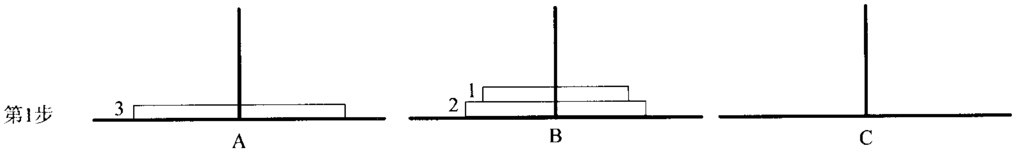


图 9-8　第一步移动

（2）将 A 棒上的一个圆盘（圆盘 3）移到 C 棒上，如图 9-9 所示。

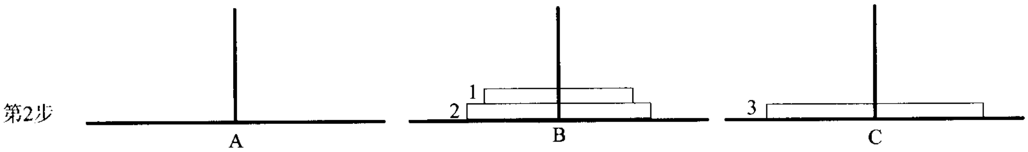


图 9-9　第二步移动

（3）将 B 棒上的 2 个圆盘移到 C 棒上，如图 9-10 所示。

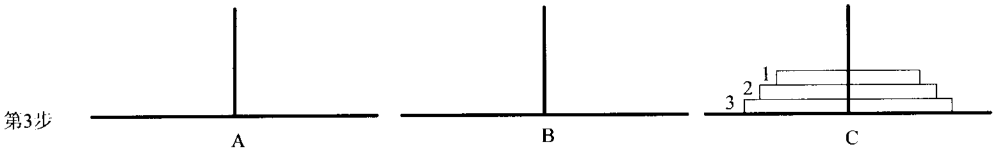


图 9-10　第三步移动

当然，这里的第一步和第三步是移动多个圆盘的操作，可以采用递归的思想，仍然使用上述步骤来完成。这样，我们便完成了三个圆盘的汉诺塔问题。将上述解决问题的步骤加以推广，便可以得到如下递归求解汉诺塔算法：

如果只有一个圆盘，则把该圆盘从 A 棒移动到 C 棒，完成移动。如果圆盘数量 n>1，移动圆盘的过程可分为三步：

（1）将 A 棒上的 n-1 个圆盘移到 B 棒上；

（2）将 A 棒上的一个圆盘移到 C 棒上；

（3）将 B 棒上的 n-1 个圆盘移到 C 棒上。

其中，移动 n-1 个圆盘的工作，仍然可以归结为上述算法，也就是递归运算。

为了通用性的方便，我们可以编写一个递归算法，用于计算 n 个圆盘的汉诺塔问题。算法的示例代码如下：

```
void hanoi(int n,char a,char b,char c)                    //汉诺塔算法
{
    if(n==1)
    {
       printf("第%d 次移动:\t 圆盘从%c 棒移动到%c 棒\n",++count,a,c);
    }
    else
    {
        hanoi(n-1,a,c,b);                                 //递归调用
        printf("第%d 次移动:\t 圆盘从%c 棒移动到%c 棒\n",++count,a,c);
        hanoi(n-1,b,a,c);                                 //递归调用
    }
}
```

这里，输入参数 n 为圆盘数量，输入参数 a 为 A 棒的符号，输入参数 b 为 B 棒的符号，输入参数 c 为 C 棒的符号。程序中，严格遵循前面的算法思想，采用递归调用来完成圆盘的移动。为了让读者更加清楚地理解整个移动过程，这里输出了每一步的操作。

9.6.2 汉诺塔求解

有了上述通用的汉诺塔算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的汉诺塔问题求解程序代码：

【程序 9-6】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_6
{
    static long count;                                    //移动的次数
    static void hanoi(int n,char a,char b,char c)         //汉诺塔算法
    {
        if(n==1)
        {
           System.out.printf("第%d 次移动:\t 圆盘从%c 棒移动到%c 棒\n",++count,a,c);
        }
        else
        {
            hanoi(n-1,a,c,b);                             //递归调用
            System.out.printf("第%d 次移动:\t 圆盘从%c 棒移动到%c 棒\n",++count,a,c);
            hanoi(n-1,b,a,c);                             //递归调用
        }
    }
    public static void main(String[] args)
{
        int n;                                            //圆盘数量
        count=0;
        System.out.printf("汉诺塔问题求解！ \n");
        System.out.printf("请输入汉诺塔圆盘的数量:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();
        hanoi(n,'A','B','C');                             //求解
        System.out.printf("求解完毕！ 总共需要%d 步移动！ \n",count);
    }
}
```

在主方法中，首先初始化移动次数 count 为 0，然后由用户输出汉诺塔圆盘的数量，接着调用 hanoi()方法来求解汉诺塔问题。

执行该程序，输入圆盘数量为 3，得到如下结果，如图 9-11 所示。从这里的结果可知，当圆盘数量为 3 的时候，需要移动 7 次。

执行该程序，输入圆盘数量为 4，得到如下结果，如图 9-12 所示。从这里的结果可知，当圆盘数量为 4 的时候，需要移动 15 次。

图 9-11 3 圆盘的汉诺塔求解

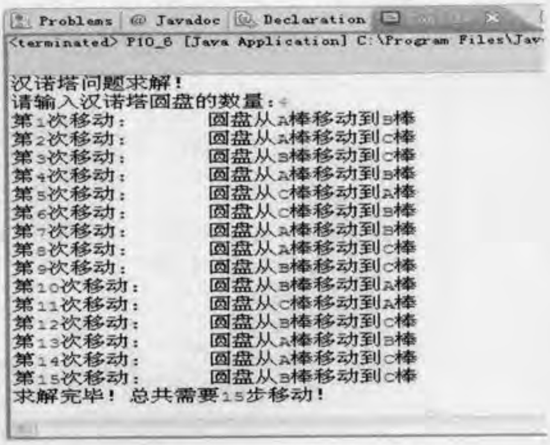


图 9-12 4 圆盘的汉诺塔求解

汉诺塔问题是一个非常复杂的问题，当圆盘数量很大的时候，需要移动圆盘的次数是一个天文数字，对计算机的要求比较高。因此，一般来说，在短时间内只能求解圆盘数目比较小的汉诺塔问题。读者可以自己反复执行该程序，来体验汉诺塔问题的求解。

9.7 窃贼问题

窃贼问题是一个典型的最优化的问题。窃贼问题的大意如下：

有一个窃贼带着一个背包去偷东西，房屋中共有 5 件物品，其重量和价值如下：

物品 1：6 公斤，48 元。

物品 2：5 公斤，40 元。

物品 3：2 公斤，12 元。

物品 4：1 公斤，8 元。

物品 5：1 公斤，7 元。

窃贼希望能够拿最大价值的东西，而窃贼的背包最多可装重量 8 公斤的物品。那么窃贼应该装下列哪些物品才能达到要求呢？

9.7.1 窃贼问题算法

我们首先来分析一下窃贼问题。窃贼问题是关于最优化的问题，可使用动态规划的思想来解最优化问题。窃贼问题求解的操作过程如下：

（1）首先创建一个空集合。

（2）然后向空集合中增加元素，每增加一个元素就先求出该阶段最优解。

（3）继续添加元素，直到所有元素都添加到集合中，最后得到的就是最优解。

采用上述思路，窃贼问题的求解算法，如图 9-13 所示。

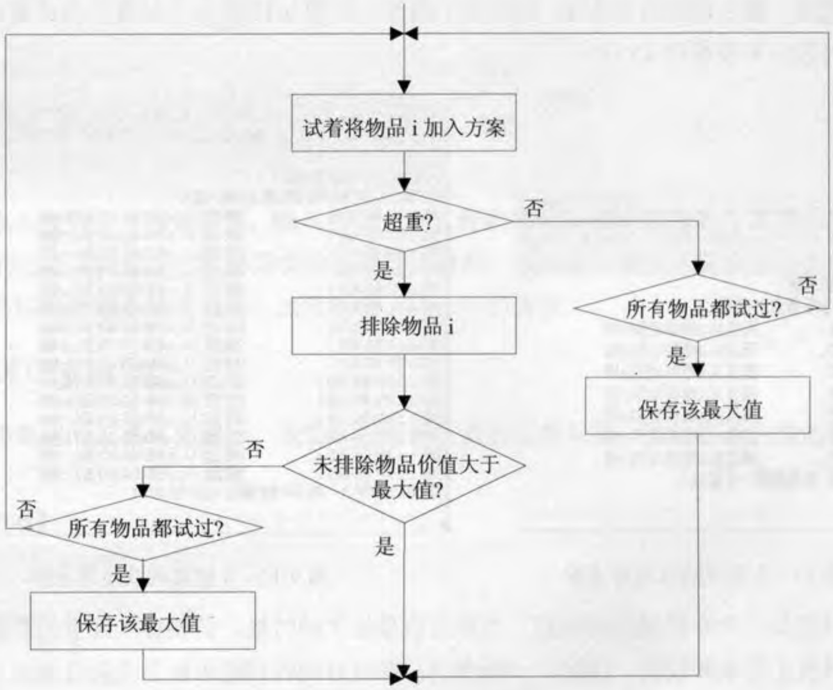


图 9-13　窃贼问题求解算法

（1）首先，窃贼将物品 i 试着添加到方案中。

（2）然后判断是否超重，若未超重，则继续添加下一个物品，重复第一步。

（3）若超重，则将该物品排除在方案之外，并判断此时所有未排除物品的价值是否小于已有最大值；如果满足，则不必再尝试后续物品了。

我们可以按照这个思路来编写相应的窃贼问题的求解算法，代码示例如下：

```
class GType                                          //结构
{
    double value;                                    //价值
    double weight;                                   //重量
    char isSelect;                                   //是否选中到方案
}

static double maxvalue;                              //方案最大价值
static double totalvalue;                            //物品总价值
static double maxwt;                                 //窃贼能拿的最大数量
static int num;                                      //物品数量
static char[] seltemp;                               //临时数组

void backpack(GType[] goods, int i, double wt, double vt)    //算法
{
```

```
        int k;
        if (wt + goods[i].weight <= maxwt)//将物品 i 包含在当前方案,判断重量小于等于限制重量
        {
            seltemp[i] = 1;                              //选中第 i 个物品
            if (i < num - 1)                             //如果物品 i 不是最后一个物品
            {
             backpack(goods, i + 1, wt + goods[i].weight, vt); //递归调用,继续添加物品
            }
            else
            {
                for (k = 0; k < num; ++k)
                {
                    goods[k].isSelect = seltemp[k];
                }
             maxvalue = vt;                              //保存当前方案的最大价值
            }
    }
        seltemp[i] = 0;                                  //取消物品 i 的选择状态
        if (vt - goods[i].value >maxvalue)               //还可以继续添加物品
        {
            if (i < num - 1)
            {
                backpack(goods, i + 1, wt, vt - goods[i].value);   //递归调用
             }
             else
             {
                for (k = 0; k < num; ++k)
                 {
                    goods[k].isSelect = seltemp[k];
                 }
                maxvalue = vt - goods[i].value;
              }
    }
    }
```

这里，首先声明了一个 GType 类型的数据结构，用来保存物品的相关信息，包括物品的重量、价值、是否被选入方案等。该方法的输入参数 goods 为 GType 类型，输入参数 i 代表要尝试加入的物品 i，输入参数 wt 为当前选择已经达到的重量和，输入参数 vt 为当前选择已经达到的价值和。

程序中严格遵循了前面介绍的动态规划算法，读者可以对照两者来加深理解。

9.7.2　窃贼问题求解

有了上述通用的窃贼问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的窃贼问题求解程序代码：

【程序 9-7】

```
import java.util.Scanner;

class GType                                 //结构
{
    double value;                           //价值
    double weight;                          //重量
    char isSelect;                          //是否选中到方案
}
```

```
public class P10_7
{
    static double maxvalue;                                  //方案最大价值
    static double totalvalue;                                //物品总价值
    static double maxwt;                                     //窃贼能拿的最大数量
    static int num;                                          //物品数量
    static char[] seltemp;                                   //临时数组

    static void backpack(GType[] goods, int i, double wt, double vt)//算法
    {
        int k;
        if (wt + goods[i].weight <= maxwt)                   //将物品 i 包含在当前方案,判断重量小于等于限制重量
        {
            seltemp[i] = 1;                                  //选中第 i 个物品
            if (i < num - 1)                                 //如果物品 i 不是最后一个物品
            {
            backpack(goods, i + 1, wt + goods[i].weight, vt);    //递归调用,继续添加物品
            }
            else
            {
                for (k = 0; k < num; ++k)
                {
                    goods[k].isSelect = seltemp[k];
                }
                maxvalue = vt;                               //保存当前方案的最大价值
            }
        }
        seltemp[i] = 0;                                      //取消物品 i 的选择状态
        if (vt - goods[i].value >maxvalue)                   //还可以继续添加物品
        {
            if (i < num - 1)
            {
                backpack(goods, i + 1, wt, vt - goods[i].value);  //递归调用
            }
            else
            {
                for (k = 0; k < num; ++k)
                {
                    goods[k].isSelect = seltemp[k];
                }
                maxvalue = vt - goods[i].value;
            }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
            double sumweight;
            int i;

            System.out.print("窃贼问题求解！ \n");
            System.out.print("窃贼背包能容纳的最大重量:");
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            maxwt=input.nextDouble();                        //窃贼背包能容纳的最大重量
            System.out.print("可选物品数量:");
            num=input.nextInt();                             //可选物品数量

            GType[] goods=new GType[num];
            seltemp=new char[num];
```

```
            totalvalue=0;                                          //初始化总价值
            for (i = 0; i < num; i++)
            {
                GType t=new GType();
                System.out.print("输入第"+(i+1)+"号物品的重量和价值:");
                t.weight=input.nextDouble();
                t.value=input.nextDouble();
                totalvalue+=t.value;                               //统计所有物品的总价值
                goods[i]=t;
            }
            System.out.print("\n 背包最大能装的重量为:   "+maxwt+" \n\n");
            for (i = 0; i < num; i++)
            {
    System.out.print("第"+(i+1)+"号物品重:"+goods[i].weight+",价值:"+goods[i].value+" \n");
                }
            for (i = 0; i < num; i++)
            {
                seltemp[i]=0;
            }
            maxvalue=0;
            backpack(goods,0,0.0,totalvalue);                      //求解
            sumweight=0;
            System.out.print("\n 可将以下物品装入背包,使背包装的物品价值最大:\n");
            for (i = 0; i < num; ++i)
            {
                if (goods[i].isSelect==1)
                {
                    System.out.print("第"+(i+1)+"号物品,重量: "+goods[i].weight+" ,价值: "+goods[i].value+" \n");
                     sumweight+=goods[i].weight;
                }
            }
        System.out.print("\n 总重量为:   "+sumweight+" ,总价值为:   "+maxvalue+" \n");
    }
}
```

这里，主方法首先由用户输入窃贼背包能容纳的最大重量和可选物品数量，接着，由用户输入物品的重量和价值信息。然后，开始通过递归来求解窃贼问题。最后输出最优化的解决方案。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-14 所示。从这里可以看出，窃贼只需拿物品 1、物品 4 和物品 5 便可以，此时总重量为 8，总价值为 63。

图 9-14　执行结果

9.8 马 踏 棋 盘

马踏棋盘问题是一个非常有趣的智力问题。马踏棋盘问题的大意如下：

国际象棋的棋盘有 8 行 8 列共 64 个单元格，无论将马放于棋盘的哪个单元格，都可让马踏遍棋盘的每个单元格。问马应该怎么走才可以踏遍棋盘的每个单元格？

9.8.1 马踏棋盘算法

我们先来分析一下马踏棋盘问题。在国际象棋中，马只能走“日”字形，但是马位于不同的位置其可以走的方向有所区别：

- 当马位于棋盘中间位置时，马可以向 8 个方向跳动，
- 当马位于棋盘的边或角时，马可以跳动的方向将少于 8 个。
- 另外，为了求解最少的走法，当马所跳向的 8 个方向中的某一个或几个方向已被马走过，那么马也将跳至下一步要走的位置。

我们可以使用递归的思想来解决马踏棋盘问题，其操作步骤如下：

（1）从起始点开始向下一个可走的位置走一步。

（2）接着以该位置为起始，再向下一个可走的位置走一步。

（3）这样不断递归调用，直到走完 64 格单元格，就找到一个行走方案。

这里需要注意的是，如果在行走过程中，某个位置向 8 个方向都没有可走的点，则需要退回上一步，从上一个位置的另外一个可走位置继续递归调用，直至找到一个行走方案。

我们可以按照这个思路来编写相应的马踏棋盘问题的求解算法，代码示例如下：

```
class Coordinate
{
    int x;
    int y;

    public Coordinate(int a,int b){
        x=a;
        y=b;
    }
}                                                   //棋盘上的坐标

static int[][] chessboard=new int[8][8];
static int curstep;                                 //马跳的步骤序号

//马可走的八个方向
static Coordinate[] fangxiang={new Coordinate(-2, 1), new Coordinate(-1, 2),
                              new Coordinate(1, 2), new Coordinate(2, 1),
                              new Coordinate(2, -1), new Coordinate(1, -2),
                              new Coordinate(-1, -2),new Coordinate(-2, -1)};
void Move(Coordinate curpos)                        //马踏棋盘算法
{
      Coordinate next=new Coordinate(0,0);
int i,j;
      if (curpos.x < 0 || curpos.x > 7 || curpos.y < 0 || curpos.y > 7)   //越界
{
```

```
            return;
        }
        if (chessboard[curpos.x][curpos.y]!=0)                    //已走过
        {
            return;
        }
        chessboard[curpos.x][curpos.y] = curstep; //保存步数
        curstep++;
        if (curstep > 64)                                         //棋盘位置都走完了
        {
            for (i = 0; i < 8; i++)                               //输出走法
            {
                for (j = 0; j < 8; j++)
                {
                    System.out.printf("%5d", chessboard[i][j]);

                }
                System.out.print("\n");
            }
            System.exit(0);
        }
        else
        {
            for (i = 0; i < 8; i++)                               //8 个可能的方向
            {
                next.x = curpos.x + fangxiang[i].x;
                next.y = curpos.y + fangxiang[i].y;
                if (next.x < 0 || next.x > 7 || next.y < 0 || next.y > 7)
                {
                }
                else
                {
                    Move(next);
                }
            }
        }

        chessboard[curpos.x][curpos.y] = 0;                       //清除步数序号
        curstep--;                                                //减少步数
    }
```

这里，输入参数 curpos 是 Coordinate 类型。方法 Move()为马向前走一步的算法，程序中通过递归来实现遍历棋盘所有位置。读者可以参阅前面的算法来加深理解。当找到一个遍历方案后，便输出马的走法信息。

9.8.2 马踏棋盘求解

有了上述通用的马踏棋盘问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的马踏棋盘问题求解程序代码：

【程序 9-8】

```
import java.util.*;

class Coordinate                                                  //棋盘上的坐标
{
    int x;
    int y;
```

```
    public Coordinate(int a,int b)
    {
        x=a;
        y=b;
    }
}

public class P10_8
{
    static int[][] chessboard=new int[8][8];
    static int curstep;                                             //马跳的步骤序号

    //马可走的八个方向
    static Coordinate[] fangxiang={new Coordinate(-2, 1), new Coordinate(-1, 2),
                                  new Coordinate(1, 2), new Coordinate(2, 1),
                                  new Coordinate(2, -1), new Coordinate(1, -2),
                                  new Coordinate(-1, -2),new Coordinate(-2, -1)};

    static void Move(Coordinate curpos)                             //马踏棋盘算法
    {
        Coordinate next=new Coordinate(0,0);

      int i,j;
      if (curpos.x < 0 || curpos.x > 7 || curpos.y < 0 || curpos.y > 7)     //越界
      {
          return;
      }
      if (chessboard[curpos.x][curpos.y]!=0)                        //已走过
      {
          return;
      }
      chessboard[curpos.x][curpos.y] = curstep;                     //保存步数
      curstep++;
      if (curstep > 64)                                             //棋盘位置都走完了
      {
          for (i = 0; i < 8; i++)                                   //输出走法
          {
              for (j = 0; j < 8; j++)
               {
               System.out.printf("%5d", chessboard[i][j]);

               }
              System.out.print("\n");
          }
          System.exit(0);
      }
      else
      {
          for (i = 0; i < 8; i++)                                   //8 个可能的方向
          {

              next.x = curpos.x + fangxiang[i].x;
              next.y = curpos.y + fangxiang[i].y;
              if (next.x < 0 || next.x > 7 || next.y < 0 || next.y > 7)
              {
```

```
                }
                else
                {
                    Move(next);
                }
            }
        }

        chessboard[curpos.x][curpos.y] = 0;            //清除步数序号
        curstep--;                                      //减少步数
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        int i, j;
            Coordinate start=new Coordinate(0,0);

            System.out.print("马踏棋盘问题求解！\n");
            System.out.print("请先输入马的一个起始位置(x,y):");
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            start.x=input.nextInt();
            start.y=input.nextInt();                   //起始位置

            if (start.x < 1 || start.y < 1 || start.x > 8 || start.y > 8)
            {                                           //越界
                System.out.print("起始位置输入错误，请重新输入！\n");
                System.out.print("over!");
            }

            for(i=0;i<8;i++)                           //初始化棋盘各单元格状态
            {
                for(j=0;j<8;j++)
                {
                    chessboard[i][j]=0;
                }
            }

            start.x--;
            start.y--;
            curstep = 1;                               //第 1 步

            Move(start);                               //求解
    }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入马的一个起始位置，然后初始化棋盘各单元格状态，接着调用 Move()方法来递归求解一个走法。最后，输出马的走法信息。

执行该程序，输入马的一个起始位置（1，1），得到如下结果，如图 9-15 所示。如果输入马的另外一个起始位置（8，8），得到结果如图 9-16 所示。

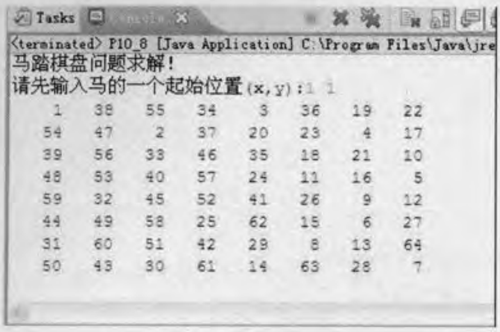


图 9-15　执行结果

图 9-16　执行结果

9.9　八皇后问题

八皇后问题是高斯于 1850 年提出的，这是一个典型的回溯算法的问题。八皇后问题的大意如下：

国际象棋的棋盘有 8 行 8 列共 64 个单元格，在棋盘上摆放八个皇后，使其不能互相攻击，也就是说任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。问总共有多少种摆放方法，每一种摆放方式是怎样的。

目前，数学上可以证明八皇后问题总共有 92 种解。

9.9.1　八皇后问题算法

我们首先来分析八皇后问题。这个问题的关键是，八个皇后中任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。我们可以采用递归的思想来求解八皇后问题，算法的思路如下：

（1）首先在棋盘的某个位置放置一个皇后。

（2）然后，放置下一个皇后。

（3）此时，判断该皇后是否与前面已有皇后形成互相攻击，若不形成互相攻击，则重复第二个步骤，继续放置下一列的皇后。

（4）当放置完 8 个不形成攻击的皇后，就找到一个解，将其输出。

这里，可以使用递归调用的方法来实现。我们可以按照这个思路来编写相应的八皇后问题的求解算法，代码示例如下：

```
static int iCount = 0;                          //全局变量
static int[] WeiZhi=new int[8];                 //全局数组

void EightQueen(int n)                          //算法
{
    int i,j;
    int ct;                                     //用于判断是否冲突
    if (n == 8)                                 //若 8 个皇后已放置完成
    {
        Output();                               //输出求解的结果
        return;
    }
    for (i = 1; i <= 8; i++)                    //试探
    {
```

```
            WeiZhi[n] = i;                                       //在该列的第 i 行上放置
            //判断第 n 个皇后是否与前面皇后形成攻击
            ct=1;
    for (j = 0; j < n; j++)
            {
                if (WeiZhi[j] == WeiZhi[n])                      //形成攻击
                {
                    ct=0;
                }
                else if (Math.abs(WeiZhi[j] - WeiZhi[n]) == (n - j))  //形成攻击
                {
                    ct=0;
                }
                else
                {
                }
            }

            if (ct==1)                                           //没有冲突，就开始下一列的试探
                EightQueen(n + 1);                               //递归调用
        }
}
```

在这里，输入参数 n 表示在第 n 列放置皇后。这里，全局数组 WeiZhi 记录皇后在各列上的放置位置，全局变量 iCount 记录解的序号。

该方法在第 n 列的各个行上依次试探，并判断是否形成攻击。如果没有冲突，则递归调用该方法来摆放下一个皇后。当所有的皇后都放置后，便输出结果。

9.9.2 八皇后问题求解

有了上述通用的八皇后问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的八皇后问题求解程序代码：

【程序 9-9】

```
public class P10_9
{
    static int iCount = 0;                                       //全局变量
    static int[] WeiZhi=new int[8];                              //全局数组

    static void Output()                                         //输出解
    {
        int i,j,flag=1;
        System.out.printf("第%2d 种方案(★表示皇后):\n", ++iCount); //输出序号。
        System.out.printf("   ");
        for(i=1;i<=8;i++)
        {
            System.out.printf("_");
        }
        System.out.printf("\n");
        for (i = 0; i < 8; i++)
        {
            System.out.printf("   |");
            for (j = 0; j < 8; j++)
            {
```

```
                if(WeiZhi[i]-1 == j)
                  {
                    System.out.printf("★");                    //皇后的位置
                  }
                else
                {
                    if (flag<0)
                       {
                        System.out.printf("      ");              //棋格
                       }
                    else
                       {
                        System.out.printf("■");                //棋格
                       }
                }
                flag=-1*flag;
            }
            System.out.printf("|  \n");
            flag=-1*flag;
        }
        System.out.printf("   ");
        for(i=1;i<=8;i++)
        {
            System.out.printf("¯");
        }
        System.out.printf("\n");
    }

    static void EightQueen(int n)                              // 算法
    {
        int i,j;
        int ct;                                                //用于判断是否冲突
        if (n == 8)                                            //若 8 个皇后已放置完成
        {
            Output();                                          //输出求解的结果
            return;
        }
        for (i = 1; i <= 8; i++)                               //试探
        {
            WeiZhi[n] = i;                                     //在该列的第 i 行上放置
            //判断第 n 个皇后是否与前面皇后形成攻击
            ct=1;
          for (j = 0; j < n; j++)
          {
            if (WeiZhi[j] == WeiZhi[n]) // 形成攻击
            {
                ct=0;
            }
            else if (Math.abs(WeiZhi[j] - WeiZhi[n]) == (n - j))  // 形成攻击
            {
                ct=0;
            }
            else
            {
            }
```

```
            }

            if (ct==1)                         //没有冲突，就开始下一列的试探
                EightQueen(n + 1);             //递归调用
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        System.out.printf("八皇后问题求解！\n");
        System.out.printf("八皇后排列方案:\n");
        EightQueen(0);                         //求解
    }
}
```

在该程序中，调用 EightQueen()方法来递归求解八皇后问题，求得的结果将通过 Output()方法输出显示。执行该程序，便可以显示所有的求解方案，如图 9-17 所示。

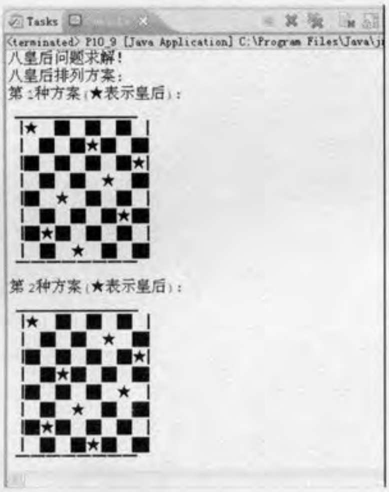


图 9-17　执行结果

9.10　寻找假银币

寻找假银币是一个非常有趣的智力题目，寻找假银币的大意如下：

现在有 8 枚银币，其中有一枚是假币。但是，从外观和做工上无法分辨哪枚是真币哪枚是假币，只知道假币的重量要比真币稍轻。则要求仅使用一个天平，如何以最少的步骤寻找到假银币？

9.10.1　寻找假银币算法

我们先来分析一下寻找假银币问题。其实寻找假银币并不难，一种最基本的方法便是首先给硬币编上序号（1~30），然后通过天平进行两两比较，操作步骤如下：

（1）首先比较第 1 枚银币和第 2 枚银币的重量，如果天平两边平衡，则进行下一步操作，否则较轻的一边的硬币为假币；

（2）接着比较第 3 枚银币和第 4 枚银币的重量，如果天平两边平衡，则进行下一步操作，否则

较轻的一边的硬币为假币；

……

重复以上步骤，直到 8 枚银币都比较完为止，便可以找到假银币。这种两两比较的方法简单，但是效率不高，需要的步骤比较多。我们需要寻找最少的操作步骤。

我们可以采用递归分治的思想来求解这个问题，操作步骤如下：

（1）首先为每个银币编号，然后可以将所有的银币等分为两分，放在天平的两边。

（2）因为假银币的分量较轻，因此天平较轻的一侧中一定包含假银币。

（3）再将较轻的一侧中的硬银币等分为两份，重复上述的做法。

（4）直到剩下两枚硬银币，可用天平直接找出假银币来。

这种方法在银币个数比较多的时候便显示出了优势。我们可以按照这个思路来编写相应的寻找假银币问题的求解算法，代码示例如下：

```
int FalseCoin(int coin[],int low,int high)                    //算法
{
    int i,sum1,sum2,sum3;
     int re=0;
     sum1=sum2=sum3=0;
    if(low+1==high)
    {
        if(coin[low]<coin[high])
          {
              re=low+1;
              return re;
          }
        else
          {
              re=high+1;
              return re;
          }
    }
    if((high-low+1)%2 == 0)                                   //n 是偶数
    {
        for(i=low;i<=low+(high-low)/2;i++)
     {
                sum1= sum1 + coin[i];                         //前半段和
          }
         for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
          {
                sum2 = sum2 + coin[i];                        //后半段和
          }
          if(sum1>sum2)
          {
              re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
              return re;
          }
          else if(sum1<sum2)
          {
              re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2);
              return re;
          }
          else
```

```
            {
            }
        }
        else
        {
            for(i=low;i<=low+(high-low)/2-1;i++)
            {
                sum1= sum1 + coin[i];               //前半段和
            }
            for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
            {
                sum2 = sum2 + coin[i];              //后半段和
            }
            sum3 = coin[low+(high-low)/2];
            if(sum1>sum2)
              {
                    re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
                   return re;
              }
             else if(sum1<sum2)
              {
                    re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2-1);
                   return re;
              }
              else
              {
              }
              if(sum1+sum3 == sum2+sum3)
               {
                    re=low+(high-low)/2+1;
                    return re;
               }
        }
        return re;
}
```

这里，输入参数 coin 为银币重量数组，输入参数 low 为寻找的起始银币编号，输入参数 high 为寻找的结束银币编号。该方法的返回值便是假银币的位置，也就是假银币的编号。程序中严格遵循了前面的算法，读者可以对照着加深理解。

9.10.2 寻找假银币求解

有了上述通用的寻找假银币问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的寻找假银币问题的求解程序代码：

【程序 9-10】

```
import java.util.Scanner;
public class P10_10
{
        static final int MAXNUM=30;
        static int FalseCoin(int coin[],int low,int high)          //算法
        {
            int i,sum1,sum2,sum3;
             int re=0;
```

```
 sum1=sum2=sum3=0;
if(low+1==high)
{
      if(coin[low]<coin[high])
        {
              re=low+1;
              return re;
        }
      else
        {
              re=high+1;
              return re;
        }
}
if((high-low+1)%2 == 0)                              //n 是偶数
{
      for(i=low;i<=low+(high-low)/2;i++)
        {
           sum1= sum1 + coin[i];                     //前半段和
        }
      for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
        {
           sum2 = sum2 + coin[i];                    //后半段和
        }
      if(sum1>sum2)
        {
              re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
              return re;
        }
      else if(sum1<sum2)
        {
              re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2);
              return re;
        }
        else
        {
        }
}
else
{
      for(i=low;i<=low+(high-low)/2-1;i++)
        {
           sum1= sum1 + coin[i];                     //前半段和
        }
      for(i=low+(high-low)/2+1;i<=high;i++)
        {
           sum2 = sum2 + coin[i];                    //后半段和
        }
      sum3 = coin[low+(high-low)/2];
      if(sum1>sum2)
        {
              re=FalseCoin(coin,low+(high-low)/2+1,high);
           return re;
        }
      else if(sum1<sum2)
```

```
                {
                    re=FalseCoin(coin,low,low+(high-low)/2-1);
                return re;
                }
                else
                {
                }
            if(sum1+sum3 == sum2+sum3)
                {
                    re=low+(high-low)/2+1;
                    return re;
                }
        }
        return re;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int[] coin=new int[MAXNUM];
        int i,n;
        int weizhi;
        System.out.println("分治算法求解假银币问题！");
        System.out.print("请输入银币总的个数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();                          //银币总的个数
        System.out.print("请输入银币的真假：");
        for(i=0;i<n;i++)
        {
            coin[i]=input.nextInt();                //输入银币的真假
        }
        weizhi=FalseCoin(coin,0,n-1);               //求解
        System.out.println("在上述"+MAXNUM+"个银币中，第"+weizhi+"个银币是假的！");
    }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入银币总的个数，然后由用户输入银币的真假，最后调用 FalseCoin()方法进行求解。这里，用户输入的银币真假数组用重量来表示，例如以 2 表示真银币的重量，以 1 表示假银币的重量。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-18 所示。

图 9-18　执行结果

9.11　青蛙过河

青蛙过河是一个非常有趣的智力游戏，其大意如下：

一条河之间有若干个石块间隔，有两队青蛙在过河，每队有 3 只青蛙，如图 9-19 所示。这些青蛙只能向前移动，不能向后移动，且一次只能有一只青蛙向前移动。在移动过程中，青蛙可以向前面的空位中移动，不可用一次跳过两个位置，但是可以跳过对方一只青蛙进入前面的一个空位。问两队青蛙该如何移动才能够用最少的步数分别走向对岸？

图 9-19　青蛙过河

9.11.1 青蛙过河算法

我们先来分析一下青蛙过河问题。我们可以采用如下的方案来移动青蛙，操作步骤如下：

（1）左侧的青蛙向左跳过右侧的一只青蛙，落入空位，执行第（5）步。

（2）右侧的青蛙向右跳过左侧的一只青蛙，落入空位，执行第（5）步。

（3）左侧的青蛙向右移动一格，落入空位，执行第（5）步。

（4）右侧的青蛙向左移动一格，落入空位，执行第（5）步。

（5）判断是否已将两队青蛙移动对岸，如果没有则继续从第（1）步执行，否则则结束程序。

我们可以按照这个思路来编写相应的青蛙过河问题的求解算法，代码示例如下：

```
class Frog
{
      static enum frogDirection { 向左, 向右 };

     public String frogName   ;              //青蛙名称
     public int position;                    //青蛙位置
     public frogDirection direction; //青蛙跳动的方向
     public boolean canJump;                 //是否可以跳
public boolean isEmpty = false;              //是否是空格
}

String frogJump(List<Frog> frogQueue, int emptyPositionId)   // 获取青蛙的跳动步骤,当前青蛙队列,空位置编号
{
      String frogJumpInfo = "";
      for(int i=0;i<frogQueue.size();i++)
     {
      Frog frog=(Frog)frogQueue.get(i);
      //是空位置
       if (frog.isEmpty)
             continue;
       if (!frog.canJump)
             continue;

       frogJumpInfo = "青蛙" + frog.frogName + " " + frog.direction + "跳到" + (emptyPositionId + 1) + "\r\n";
       int newPositionId = frog.position;
       List<Frog> newFrogQueue=this.editFrogQueue(frogQueue,frog.frogName,emptyPositionId, ewPositionId);

       //只要能继续跳就递归
       if (this.canFrogJump(newFrogQueue))
       {
             frogJumpInfo += this.frogJump(newFrogQueue, newPositionId);
       }
        else
        {
             if (this.isComplete(newFrogQueue))
             {
                   frogJumpInfo = frogJumpInfo + "成功";
                   break;
              }
        }
        if (frogJumpInfo.contains("成功"))
              break;
```

```
            }
            //循环结束
        return frogJumpInfo;
    }
}
```

这里，输入参数 frogQueue 为当前青蛙队列，参数 emptyPositionId 为空位置编号。程序中，严格遵循了前述的移动算法，读者可以对照着加深理解。

9.11.2　青蛙过河求解

有了上述通用的青蛙过河问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的青蛙过河问题求解程序代码：

【程序 9-11】

```
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;

class FrogOverRiver                        //青蛙过河类

{
        //初始化青蛙队列
        public    List<Frog> initializeFrogQueue()
        {
          List<Frog> frogQueue = new ArrayList<Frog>();
            frogQueue.add(new Frog(0, "左 1", Frog.frogDirection.向右, false));
            frogQueue.add(new Frog(1, "左 2", Frog.frogDirection.向右, true));
            frogQueue.add(new Frog(2, "左 3", Frog.frogDirection.向右, true));
            frogQueue.add(new Frog(3));
            frogQueue.add(new Frog(4, "右 1", Frog.frogDirection.向左, true));
            frogQueue.add(new Frog(5, "右 2", Frog.frogDirection.向左, true));
            frogQueue.add(new Frog(6, "右 3", Frog.frogDirection.向左, false));
            return frogQueue;
        }

        //当一个青蛙跳动后,形成一个新的队列
        private List<Frog> editFrogQueue(List<Frog> frogQueue, String frogName, int oldEmptyPositonID, int
newEmptyPositonID)
        {
            List<Frog> newFrogQueue = new ArrayList<Frog>();
          for(int i=0;i<frogQueue.size();i++)
          {
              Frog frog=(Frog)frogQueue.get(i);
                Frog newFrog = new Frog(frog);
              if (newFrog.isEmpty)
                    newFrog.position = newEmptyPositonID;
              if (newFrog.frogName == frogName)
              {
                    newFrog.position = oldEmptyPositonID;
              }

              newFrog.canJump = false;
              if ((newEmptyPositonID - newFrog.position) > 0 && (newEmptyPositonID - newFrog.position) < 3
&& newFrog.direction == Frog.frogDirection.向右)
                          newFrog.canJump = true;
```

```
                if ((newFrog.position - newEmptyPositonID) > 0 && (newFrog.position - newEmptyPositonID) < 3
&& newFrog.direction == Frog.frogDirection.向左)
                        newFrog.canJump = true;

                newFrogQueue.add(newFrog);
            }
                return newFrogQueue;
        }

        //是否已经完成位置对换,即前三个青蛙的位置都大于 3
        private boolean isComplete(List<Frog> frogQueue)
        {
            return (frogQueue.get(0).position > 3 && frogQueue.get(1).position > 3 && frogQueue.get(2).position > 3);
        }

        //是否还有可以跳动的青蛙,只要有可以跳动的,就没有达到最后的状态，但都不可以跳动了也不一定对换完
了，这里只是控制递归
        private boolean canFrogJump(List<Frog> frogQueue)
        {
            for(int i=0;i<frogQueue.size();i++)
            {
                Frog frog=(Frog)frogQueue.get(i);
                if (frog.canJump)
                return true;
            }
            return false;
        }

        // 获取青蛙的跳动步骤
        public String frogJump(List<Frog> frogQueue, int emptyPositionId)   //当前青蛙队列,空位置编号
        {
         String frogJumpInfo = "";
            for(int i=0;i<frogQueue.size();i++)
            {
              Frog frog=(Frog)frogQueue.get(i);
                //是空位置
                if (frog.isEmpty)
                    continue;
                if (!frog.canJump)
                    continue;

                frogJumpInfo = "青蛙" + frog.frogName + " " + frog.direction + "跳到" + (emptyPositionId + 1) + "\r\n";
                int newPositionId = frog.position;
                List<Frog> newFrogQueue = this.editFrogQueue(frogQueue, frog.frogName, emptyPositionId, newPositionId);

                //只要能继续跳就递归
                if (this.canFrogJump(newFrogQueue))
                {
                    frogJumpInfo += this.frogJump(newFrogQueue, newPositionId);
                }
                else
                {
                  if (this.isComplete(newFrogQueue))
                  {
```

```
                frogJumpInfo = frogJumpInfo + "成功";
                break;
            }
        }
        if (frogJumpInfo.contains("成功"))
                break;
        }
        //循环结束
        return frogJumpInfo;
    }
}

class Frog
{
    static enum frogDirection { 向左, 向右 };
    public String frogName;             //青蛙名称
    public int position;                //青蛙位置
    public frogDirection direction;     //青蛙跳动的方向
    public boolean canJump;             //是否可以跳
    public boolean isEmpty = false;     //是否是空格

    public Frog(int positon, String frogName, frogDirection direction, boolean canJump)
    {
        this.position = positon;
        this.frogName = frogName;
        this.direction = direction;
        this.canJump = canJump;
    }

    public Frog(int positon)
    {
        this.frogName = "空";
        this.position = positon;
        this.canJump = false;
        this.isEmpty = true;
    }
    public Frog(Frog frog)
    {
        this.position = frog.position;
        this.frogName = frog.frogName;
        this.direction = frog.direction;
        this.canJump = frog.canJump;
        this.isEmpty = frog.isEmpty;
    }
}
public class P10_11
{
    public static void main(String[] args)
    {
        FrogOverRiver f= new FrogOverRiver();
        List frogQueue =f.initializeFrogQueue();
        System.out.println(f.frogJump(frogQueue, 3));
    }
}
```

这里，主方法首先初始化青蛙的位置，接着，调用 frogJump()方法求解青蛙过河问题。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-20 所示。从其中可知，通过 15 步移动便可以让所有的青蛙完成过河。

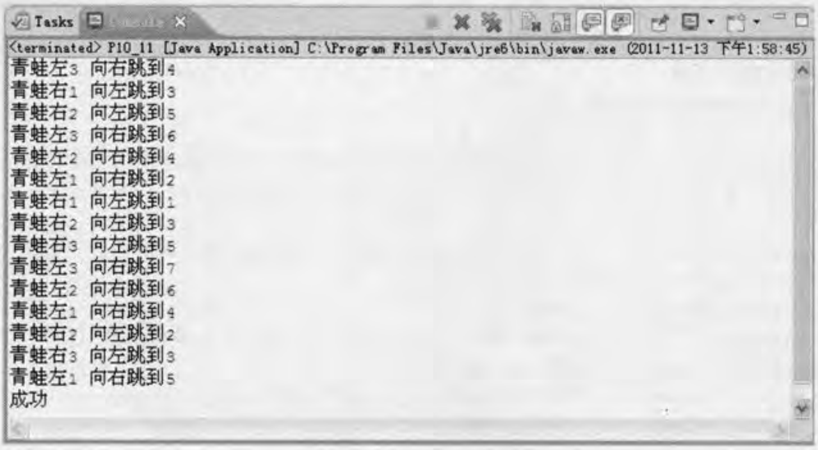


图 9-20　执行结果

9.12　三　色　旗

三色旗问题在很多算法书籍中都有提到，三色旗问题的大意如下：

有一条绳子上面挂有白、红、蓝三种颜色的多面旗子，这些旗子的排列是无序的。现在要将绳子上的旗子按蓝、白、红三种颜色进行归类排列，但是只能在绳子上进行旗子的移动，并且每次只能调换两个旗子。问如何采用最少的步骤来完成三色旗的排列呢？

9.12.1　三色旗算法

我们先来分析一下三色旗问题。假设绳子上共有 10 面旗子，蓝色旗子用符号 B 表示，白色旗子用符号 W 表示，红色旗子用符号 R 表示，如图 9-21 所示。

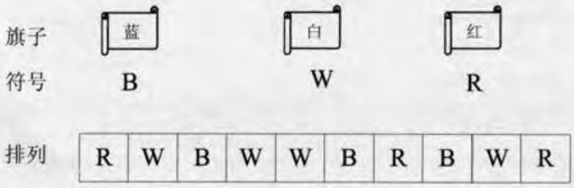


图 9-21　三色旗

程序中可以使用 3 个变量（blue、write、red）来指示三种颜色的旗子：在 0~(blue-1)之间放蓝色旗，blue~(write-1)放白色旗，(red+1)~9 放红色旗，而 write~red 之间是未被处理的元素。每一次都处理变量 write 指向位置的元素，可分如下 3 种情况处理：

- 如果 write 所在位置的元素是白旗，表示该位置的元素应该在此，将 write++，接着处理下一个旗子。
- 如果 write 所在位置的元素是蓝旗，表示需将蓝旗与 blue 变量所在位置的元素对调，然后是 blue++、write++，处理下一个旗子。
- 如果 write 所在位置的元素是红旗，表示需将红旗与 red 变量的元素对调，然后将 red--，继续处理下一旗子。

我们可以按照这个思路来编写相应的三色旗问题的求解算法，代码示例如下：

```
static char color[] = "rwbwwbrbwr".toCharArray();          //三色旗子排列的数组
static int Blue, Write, Red;

void threeflags()                                            //三色旗算法
{
    while (color[Write] == 'b')                              //白旗
    {
        Blue++;                                              //向后移动蓝旗
        Write++;                                             //向后移动白旗
    }
    while (color[Red] == 'r')                                //红旗
    {
        Red--;                                               //向前移动红旗
    }
    while (Write <= Red)
    {
        if (color[Write] == 'r')                             //红旗
        {
            swap(color,Write, Red);                          //对调红旗和白旗
            Red--;
            while (color[Red] == 'r')                        //若是红旗
            {
                Red--;                                       //向前移动红旗
            }
        }
        while (color[Write] == 'w')                          //白旗
        {
            Write++;
        }
        if (color[Write] == 'b')                             //蓝旗
        {
            swap(color,Write, Blue);                         //对调
            Blue++;
            Write++;
        }
    }
}
```

这里，数组 color 为三色旗子初始排列的数组，变量 Blue、Write 和 Red 的含义如前所述。程序中通过循环来处理每一面旗子，严格遵循了前面的算法思想，读者可以对照两者来加深理解。

9.12.2 三色旗求解

有了上述通用的三色旗问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的三色旗问题求解程序代码：

【程序 9-12】

```
public class P10_12
{
    static int count;                                             //对调次数
    static char color[] = "rwbwwbrbwr".toCharArray();             //三色旗子排列的数组
    static int Blue, Write, Red;

    static void swap(char[] c,int x, int y)                       //对调及显示
    {
        int i;
        char temp;

        temp= c[x];                                               //对调操作
        c[x] = c[y];
        c[y] = temp;
        count++;                                                  //累加对调次数

        System.out.printf("第%d 次对调后：",count);
        for (i = 0; i < color.length; i++)                        //输出移动后的效果
        {
            System.out.printf(" %c", color[i]);
        }
        System.out.printf("\n");
    }

    static void threeflags()                                      //三色旗算法
    {
        while (color[Write] == 'b')                               //白旗
        {
            Blue++;                                               //向后移动蓝旗
            Write++;                                              //向后移动白旗
        }
        while (color[Red] == 'r')                                 //红旗
        {
            Red--;                                                //向前移动红旗
        }
        while (Write <= Red)
        {
            if (color[Write] == 'r')                              //红旗
            {
                swap(color,Write, Red);                           //对调红旗和白旗
                Red--;
                while (color[Red] == 'r')                         //若是红旗
                {
                    Red--;                                        //向前移动红旗
                }
            }
```

```
            while (color[Write] == 'w')                         //白旗
            {
                Write++;
            }
            if (color[Write] == 'b')                            //蓝旗
            {
                swap(color,Write, Blue);                        //对调
                Blue++;
                Write++;
            }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
{
        int i;

            Blue=0;                                             //初始化
            Write=0;
            Red=color.length - 1;
            count=0;
            System.out.printf("三色旗问题求解!\n");
            System.out.printf("三色旗最初排列效果:\n");
            System.out.printf("                    ");
            for (i = 0; i <= Red; i++)                          //输出最初的旗子排列
            {
                System.out.printf(" %c", color[i]);
            }
            System.out.printf("\n");
            threeflags();                                       //求解
            System.out.printf("通过%d 次完成对调,最终结果如下:\n", count);
            for (i = 0; i < color.length; i++)                  //输出移动后的效果
            {
                System.out.printf(" %c", color[i]);
            }
            System.out.printf("\n");
    }
}
```

在该程序中，主方法首先初始化变量 Blue、Write 和 Red，然后输出最初的旗子排列。接着，调用 threeflags()方法来求解三色旗问题。最后输出移动后的效果。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-22 所示。从其中可以看出，总共需要 5 步便完成了三色旗的归类排列。

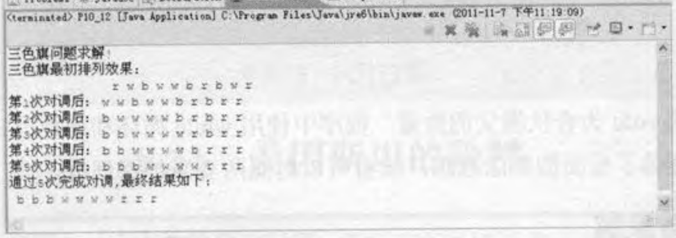


图 9-22　执行结果

9.13 渔 父 捕 鱼

渔父捕鱼问题是一个典型的递推问题，渔父捕鱼问题的大意如下：

某天晚上，A、B、C、D、E 五个渔夫合伙捕鱼，捕到一定数量之后便停止捕鱼，各自到岸边休息。第二天早晨，渔夫 A 第一个醒来，他将鱼分作五份，把多余的一条扔回河中，拿其中自己的一份回家去了。渔夫 B 第二个醒来，也将鱼分作五份，扔掉多余的一条，拿走自己的一份。渔夫 C 第三个醒来，也将鱼分作五份，扔掉多余的一条，拿走自己的一份。渔夫 D 第四个醒来，也将鱼分作五份，扔掉多余的一条，拿走自己的一份。渔夫 E 第五个醒来，也将鱼分作五份，扔掉多余的一条，拿走自己的一份。问五渔夫至少捕到多少条鱼呢？

9.13.1 渔父捕鱼算法

我们先来分析一下渔父捕鱼问题。这里，每个渔父醒来的时候，鱼的数量都应该是 5 的倍数再加 1。为了保证所有的渔父都可以按照上述的方法来分鱼，那么最后一个渔父 E 醒来之后，鱼的数量至少应该为 6。在他扔掉一条鱼之后，仍然可以平均分为 5 份。

那么，渔父 D 醒来的时候，鱼的数量应该为 6*5+1=31；

渔父 C 醒来的时候，鱼的数量应该为 31*5+1=156；

渔父 B 醒来的时候，鱼的数量应该为 156*5+1=781；

渔父 A 醒来的时候，鱼的数量应该为 781*5+1=3906；

那么，渔父至少合伙捕到 3906 条鱼。这是一个明显的递推的式子，递推公式如下：

$S_{n-1}=5S_n+1$

为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算渔父捕鱼问题。我们可以按照这个思路来编写相应的渔父捕鱼问题的求解算法，代码示例如下：

```
int fish(int yufu)                              //渔父捕鱼算法
{
    int init;
    int n;
    int s;

    init=yufu+1;
    n=yufu-1;
  s = init;
  while(n!=0)
  {
      s=5*s+1;                                   //递推
     n--;
  }
  return s;
}
```

这里，输入参数 yufu 为合伙渔父的数量，程序中使用 while 循环和递推公式来求解最初的鱼的数量。程序中严格遵循了前面的算法思想，读者可以对照两者来加深理解。

9.13.2 渔父捕鱼求解

有了上述通用的渔父捕鱼问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的渔父捕鱼问题求解程序代码：

【程序 9-13】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_13
{
    static int fish(int yufu)                              //渔父捕鱼算法
    {
        int init;
        int n;
        int s;

        init=yufu+1;
        n=yufu-1;
      s = init;
      while(n!=0)
      {
          s=5*s+1;                                         //递推
          n--;
      }
      return s;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int num;
        int yufu;

        System.out.printf("渔父捕鱼问题求解！\n");
        System.out.printf("请先输入渔父的个数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        yufu=input.nextInt();                              //渔父个数
        num=fish(yufu);                                    //求解
      System.out.printf("渔夫至少合伙捕了%d 条鱼！\n",num);
    }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入合伙渔父的个数，然后调用 fish()方法来递推求解最初捕到的鱼的数量。最后输出渔夫至少合伙捕到鱼的数量。

执行该程序，输入渔父的个数为 5，得到如下结果，如图 9-23 所示。从这里可以看出，渔父至少合伙捕到 3906 条鱼，这和前面分析的结果一致。

图 9-23　执行结果

9.14　爱因斯坦的阶梯

爱因斯坦的阶梯问题是一个有趣的数论问题，爱因斯坦的阶梯的大意如下：

有一天爱因斯坦给他的朋友出了一个题目，有一个楼，其两层之间有一个很长的阶梯。

如果一个人每步上 2 阶，最后剩 1 阶；
如果一个人每步上 3 阶，最后剩 2 阶；
如果一个人每步上 5 阶，最后剩 4 阶；
如果一个人每步上 6 阶，最后剩 5 阶；
如果一个人每步上 7 阶，最后刚好一阶也不剩。
问这个阶梯至少有多少阶呢？

9.14.1 爱因斯坦的阶梯算法

我们首先来分析一下爱因斯坦的阶梯问题。这是一个数论问题，假设阶梯的个数为 count，按照前述的条件，count 应该满足如下条件：

- count 除以 2 的余数为 1；
- count 除以 3 的余数为 2；
- count 除以 5 的余数为 4；
- count 除以 6 的余数为 5；
- count 除以 7 的余数为 0；

在程序中我们可以通过取模运算来对整数逐个判断，以寻找一个最小值。我们可以按照这个思路来编写相应的爱因斯坦的阶梯问题的求解算法，代码示例如下：

```
int jieti()                                  //算法
{
    int i,res;
    int count;
    count=7;
   for(i=1;i<=100;i++)                       //循环
   {
       if((count%2==1)&&(count%3==2)&&(count%5==4)&&(count%6==5) ) //判断是否满足
       {
           res=count;
           break;                            //找到，跳出循环
       }
       count=7*(i+1);                        //下一个
   }
    return count;                            //返回
}
```

这里，count 应该为 7 的倍数。程序中，从 7 开始，对每个 7 的倍数进行判断，直到寻找到一个最小的满足条件的数据为止。该函数的返回值便是求得的阶梯数。

9.14.2 爱因斯坦的阶梯求解

有了上述通用的爱因斯坦的阶梯问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的爱因斯坦的阶梯问题求解程序代码：

【程序 9-14】

```
public class P10_14
{
     static int jieti()                             //算法
     {
          int i,res;
```

```
            int count;

            count=7;
          for(i=1;i<=100;i++)                              //循环
          {
          if((count%2==1)&&(count%3==2)&&(count%5==4)&&(count%6==5) ) //判断是否满足
              {
                  res=count;
                  break;                                   //找到，跳出循环
              }
              count=7*(i+1);                               //下一个
          }
            return count;                                  //返回
      }
      public static void main(String[] args)
      {
            int num;

            System.out.printf("爱因斯坦阶梯问题求解！\n");
            num=jieti();                                   //求解
            System.out.printf("这个阶梯总共有%d 个台阶！\n",num);
      }
}
```

在该程序中，主方法直接调用 jieti()方法进行爱因斯坦的阶梯问题求解，然后输出结果。执行该程序，得到如下结果，如图 9-24 所示。可以看到共有 119 个台阶。

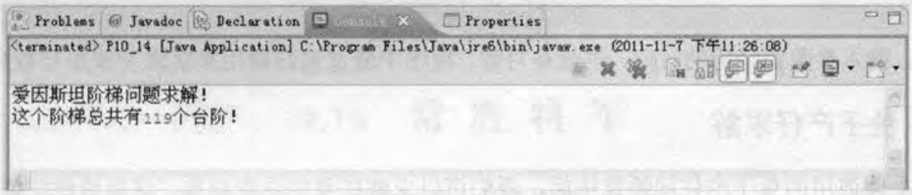


图 9-24　执行结果

9.15　兔子产仔

兔子产仔是一个非常古老而经典的问题，其与数论有关。兔子产仔问题最早记载于 13 世纪意大利数学家斐波那契的《算盘书》，其大意如下：

如果一对两个月大的兔子以后每一个月都可以生一对小兔子，而一对新生的兔子出生两个月后才可以生小兔子。也就是说，1 月份出生，3 月份才可产仔。那么假定一年内没有产生兔子死亡事件，那么 1 年后共有多少对兔子呢？

9.15.1　兔子产仔算法

我们先来分析一下兔子产仔问题。我们来逐月看一次每月的兔子对数：

第一个月：1 对兔子；

第二个月：1 对兔子；

第三个月：2 对兔子；

第四个月：3 对兔子；

第五个月：5 对兔子；

……

从上面可以看出，从第 3 个月开始，每个月的兔子总对数等于前两个月兔子数的总和。这其实就是著名的斐波那契数列。

我们可以采用递归算法来求解。为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算斐波那契数列问题。我们可以按照这个思路来编写相应的兔子产仔问题的求解算法，代码示例如下：

```
int Fibonacci(n)                                    //兔子产仔算法
{
    int t1,t2;

    if (n==1 || n==2)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
        t1=Fibonacci(n-1);                          //递归调用
        t2=Fibonacci(n-2);
        return t1+t2;
    }
}
```

这里，输入参数为经历的时间，也就是月数。程序中通过递归调用来实现斐波那契数列的计算。

9.15.2 兔子产仔求解

有了上述通用的兔子产仔问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的兔子产仔问题求解程序代码：

【程序 9-15】

```
import java.util.Scanner;
public class p10_15
{
    static int Fibonacci(int n)                     //兔子产仔算法
    {
        int t1,t2;

        if (n==1 || n==2)
        {
            return 1;
        }
        else
        {
            t1=Fibonacci(n-1);                      //递归调用
            t2=Fibonacci(n-2);
            return t1+t2;
        }
    }
```

```
    public static void main(String[] args)
    {
        int n,num;
        System.out.printf("兔子产仔问题求解！\n");
        System.out.printf("请先时间：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();                          //时间
        num=Fibonacci(n);                           //求解
       System.out.printf("经过%d 月的时间，共能繁殖成%d 对兔子！\n",n,num);
    }
}
```

在该程序中，首先由用户输入时间，也就是月数。然后，调用 Fibonacci()方法求解计算兔子产仔问题。最后，输出结果。

执行该程序，用户输入 12，得到如下结果，如图 9-25 所示。可见，经过 12 个月的时间，共能繁殖成 144 对兔子。

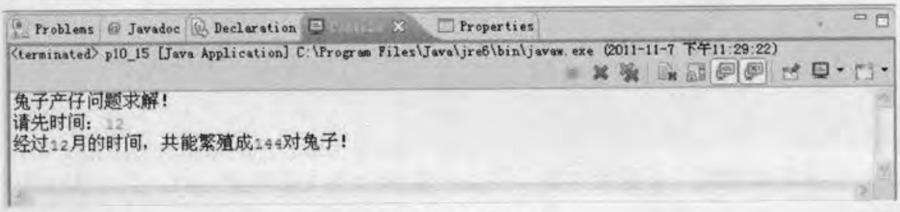


图 9-25　执行结果

9.16　常 胜 将 军

常胜将军是一个非常有意思的智力游戏趣题，常胜将军的大意如下：

甲和乙两人玩抽取火柴的游戏，共有 21 根火柴。每个人每次最多取 4 根火柴，最少取 1 根火柴。如果某个人取到最后一根火柴则输了。甲让乙先抽取，结果每次都是甲赢。这是为什么呢？

9.16.1　常胜将军算法

我们先来分析一下常胜将军问题。甲要每次都赢，那么每次甲给乙只剩下 1 根火柴，因为此时乙至少取 1 根火柴，这样才能保证计算机常胜。由于乙先抽取，因此只要保证甲抽签的数量和乙抽取的数量之后为 5 即可。

我们可以按照这个思路来编写相应的常胜将军问题的求解算法，代码示例如下：

```
void jiangjun()                                 //常胜将军算法
{
    while(true)
    {
        System.out.printf(" ---------  目前还有火柴 %d 根 ---------\n",last);
        System.out.printf("用户取火柴数量:") ;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        user=input.nextInt();                   //用户取火柴数量
        if(user<1 || user>4 || user>last)
        {
```

```
                System.out.printf("你违规了，你取的火柴数有问题!\n\n");
                continue;
            }
        last = last - user;                               //剩余火柴数量
        if(last == 0)
            {
            System.out.printf("\n 用户取了最后一个火柴,因此计算机赢了!\n");
                break;
            }
            else
            {
                computer =   5 - user;                    //计算机取火柴数量
                last = last - computer;
                System.out.printf("计算机取火柴数量:%d   \n",computer);
                if(last == 0)
                {
                    System.out.printf("\n 计算机取了最后一根火柴,因此用户赢了!\n");
                    break;
                }
            }
        }
    }
```

这里，每次抽取都判断一下是否违规，并且计算剩余的火柴数量 last。第一次由用户输入，然后计算机根据前面的算法思路来抽取。这样可以保证每次计算机都赢。

9.16.2 常胜将军求解

有了上述通用的常胜将军问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的常胜将军问题求解程序代码：

【程序 9-16】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_16
{
    static int computer,user,last;

    static void jiangjun()                                //常胜将军算法
    {
        while(true)
        {
            System.out.printf(" ----------  目前还有火柴 %d 根 ----------\n",last);
            System.out.printf("用户取火柴数量:") ;
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            user=input.nextInt();                         //用户取火柴数量
            if(user<1 || user>4 || user>last)
            {
                System.out.printf("你违规了，你取的火柴数有问题!\n\n");
                continue;
            }
            last = last - user;                           //剩余火柴数量
```

```
                if(last == 0)
                {
                System.out.printf("\n 用户取了最后一个火柴,因此计算机赢了!\n");
                    break;
                }
                else
                {
                    computer =   5 - user;                   //计算机取火柴数量
                    last = last - computer;
                    System.out.printf("计算机取火柴数量:%d   \n",computer);
                    if(last == 0)
                    {
                        System.out.printf("\n 计算机取了最后一根火柴,因此用户赢了!\n");
                        break;
                    }
                }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        int num;
        System.out.printf("常胜将军问题求解！ \n");
        System.out.printf("请先输入火柴的总量为:");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        num=input.nextInt();                             //火柴的总量
        System.out.printf("火柴的总量为%d：  ",num);
        last=num;
        jiangjun();                                      //求解
    }
}
```

在该程序中，首先由用户输入火柴的总量，然后调用 jiangjun()方法开始游戏。游戏中，用户先抽取火柴，最后计算机每次都能赢。

执行该程序，输入火柴的总量 21，得到如下结果，如图 9-26 所示。

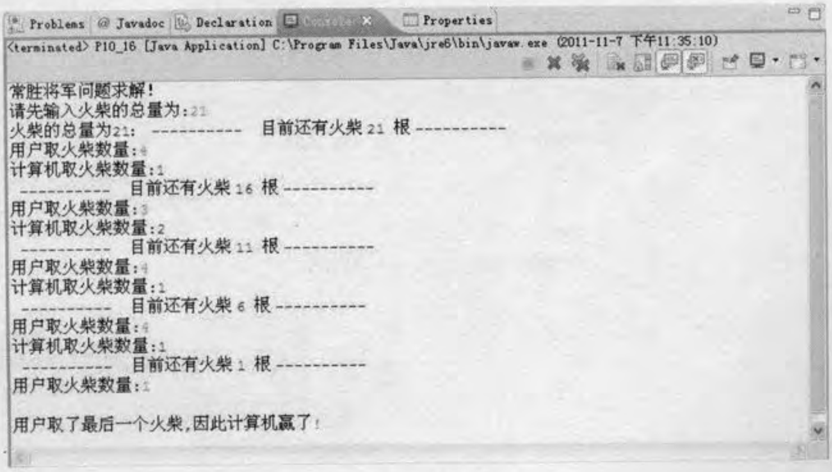


图 9-26 执行结果

9.17 新郎和新娘

新郎和新娘问题是非常典型的智力推理问题。新郎和新娘问题的大意如下：

有三对新郎和新娘参加集体婚礼，三个新郎为 A、B、C，三个新娘为 X、Y、Z。主持婚礼的人一时间忘了谁应该和谁结婚。于是，他便问参加婚礼的 6 个人中的三个，得到的回答如下：

新郎 A 说他将和新娘 X 结婚；

新娘 X 说她将和新郎 C 结婚；

新郎 C 说她将和新娘 Z 结婚。

聪明的主持人知道他们在与他开玩笑，但是，此时主持人已经推算出了谁应该和谁结婚。那么，到底是谁应该和谁结婚呢？

9.17.1 新郎和新娘算法

我们先来分析一下新郎和新娘结婚的问题。三个新郎和三个新娘随机结婚的话，共有 6 种可能，根据前面所述的 3 个错误条件，我们便可以采用穷尽的方法来逐个对照，直到找到正确的结婚对象。

我们可以按照这个思路来编写相应的新郎和新娘问题的求解算法，代码示例如下：

```
int HW(char husband[], char wife[])                      //算法
{
      int i,j,k;
      int match=0;                                       //是否匹配
    for(i=0;i<3;i++)
      {
          for(j=0;j<3;j++)
            {
              for(k=0;k<3;k++)
                {
                  if(i!=j && j!=k && i!=k)
                  {
                              if(wife[i] == 'X' || wife[k] == 'X' || wife[k] == 'Z')
                              {
                                    match=0;             //违反规则
                              }
                              else
                              {
                                    match=1;             //符合规则
                                    wi=i;
                                    wj=j;
                                    wk=k;
                                    return match;        //返回
                              }
                  }
                }
            }
      }
      return match;                                      //返回
}
```

这里，输入参数 husband 为新郎的数组，wife 为新娘的数组。全局变量 wi、wj 和 wk 保存了符合要求的新娘的编号。程序中逐个对每一个种方案进行比较，直到找到匹配的为止。该函数的返回值如果为 1 表示找到了匹配方案，为 0 表示没有找到。

9.17.2 新郎和新娘求解

有了上述通用的新郎和新娘问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的新郎和新娘问题求解程序代码：

【程序 9-17】

```
public class P10_17
{
    static int wi,wj,wk;                                          //保存匹配值

    static int HW(char husband[], char wife[])                    //算法
    {
        int i,j,k;
        int match=0;                                              //是否匹配

        for(i=0;i<3;i++)
        {
            for(j=0;j<3;j++)
            {
                for(k=0;k<3;k++)
                {
                    if(i!=j && j!=k && i!=k)
                    {
                        if(wife[i] == 'X' || wife[k] == 'X' || wife[k] == 'Z')
                        {
                            match=0;                              //违反规则
                        }
                        else
                        {
                            match=1;                              //符合规则
                            wi=i;
                            wj=j;
                            wk=k;
                            return match;                         //返回
                        }
                    }
                }
            }
        }
        return match;                                             //返回
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        char[] husband = {'A','B','C'}, wife = {'X','Y','Z'};
        int i,match;
```

```
            System.out.printf("新郎新娘问题求解！ \n");
            System.out.printf("参加婚礼的新郎为:");                    //显示新郎
            for(i=0;i<3;i++)
            {
                System.out.printf(" %c",husband[i]);
            }
            System.out.printf("\n");
            System.out.printf("参加婚礼的新娘为:");                    //显示新娘
            for(i=0;i<3;i++)
            {
                System.out.printf(" %c",wife[i]);
            }
            System.out.printf("\n");

            match=HW(husband,wife);                                    //求解
            if(match==1)
            {
                System.out.printf("A 将和%c 结婚！ \n",wife[wi]);
                System.out.printf("B 将和%c 结婚！ \n",wife[wj]);
                System.out.printf("C 将和%c 结婚！ \n",wife[wk]);
            }
        }
}
```

在该程序中，主方法首先输出新郎的符号和新娘的符号，然后调用 WH()方法来求解新郎和新娘问题，最后输出合理的结婚方案。

执行该程序，得到如下结果，如图 9-27 所示。从中我们知道，新郎 A 将和新娘 Z 结婚，新郎 B 将和新娘 X 结婚，新郎 C 将和新娘 Y 结婚。

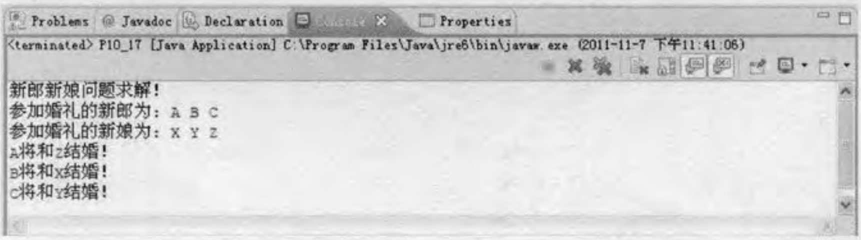


图 9-27　执行结果

9.18　三　色　球

三色球是一种排列组合问题，三色球问题的大意如下：

一个黑盒中放着 3 个红球、3 个黄球和 6 个绿球，如果从其中取出 8 个球，那么取出的球中有多种颜色搭配呢？

9.18.1　三色球算法

我们先来分析一下三色球问题。这是一个经典的排列组合问题，每种球的可能性如下：

- 取红球可以有 3 种可能：1 个、2 个、3 个；
- 取黄球可以有 3 种可能：1 个、2 个、3 个；
- 取绿球可以有 6 种可能：1 个、2 个、3 个、4 个、5 个、6 个；

我们只要在程序中穷举每一种可能性，然后判断是否满足总共 8 个球的要求即可。

为了通用性的方便，我们可以编写一个算法，用于计算三色球问题。算法的示例代码如下：

```
void threeball(int red,int yellow,int green,int n)                //算法
{
    int i,j,k;

    System.out.printf("总共有如下几种可能!\n");
    System.out.printf("\t 红球\t 黄球\t 绿球\n");
    for(i=0;i<=3;i++)                                            //红色球
    {
        for(j=0;j<=3;j++)                                        //黄色球
        {
            for(k=0;k<=6;k++)                                    //绿色球
            {
                if(i+j+k==n)                                     //判断是否符合
                {
                    System.out.printf("\t%d\t%d\t%d\n",i,j,k);
                }
            }
        }
    }
}
```

这里，输入参数 red 为红球的总数量，输入参数 yellow 为黄球的总数量，输入参数 green 为绿球的总数量，输入参数 n 为需要取出的球的数量。程序中使用三重 for 循环语句来穷尽每一种情况，并判断是否满足条件。程序将满足条件的组合输出显示。

9.18.2 三色球求解

有了上述通用的三色球问题算法后，我们可以求解任意的这类问题。这里给出完整的三色球问题求解程序代码：

【程序 9-18】

```
import java.util.Scanner;

public class P10_18
{
    static void threeball(int red,int yellow,int green,int n)        //算法
    {
        int i,j,k;

        System.out.printf("总共有如下几种可能!\n");
        System.out.printf("\t 红球\t 黄球\t 绿球\n");
        for(i=0;i<=3;i++)                                            //红色球
        {
            for(j=0;j<=3;j++)                                        //黄色球
            {
                for(k=0;k<=6;k++)                                    //绿色球
```

```
                        {
                                if(i+j+k==n)                              //判断是否符合
                                {
                                        System.out.printf("\t%d\t%d\t%d\n",i,j,k);
                                }
                        }
                }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
            int red,yellow,green;
            int n;
            System.out.printf("三色球问题求解！ \n");
            System.out.printf("请先输入红球的数量为:");
            Scanner input=new Scanner(System.in);
            red=input.nextInt();                                      //红球的数量
            System.out.printf("请先输入黄球的数量为:");
            yellow=input.nextInt();                                   //黄球的数量
            System.out.printf("请先输入绿球的数量为:");
            green=input.nextInt();                                    //绿球的数量
            System.out.printf("请先输入取出球的数量为:");
            n=input.nextInt();                                        //取出球的数量
            threeball(red,yellow,green,n);                            //求解
    }
}
```

在该程序中，主方法首先由用户输入红球的数量、黄球的数量、绿球的数量和取出球的数量。然后调用 threeball()方法来求解。

执行该程序，按照题名的要求输入数据，得到如下结果，如图 9-28 所示。

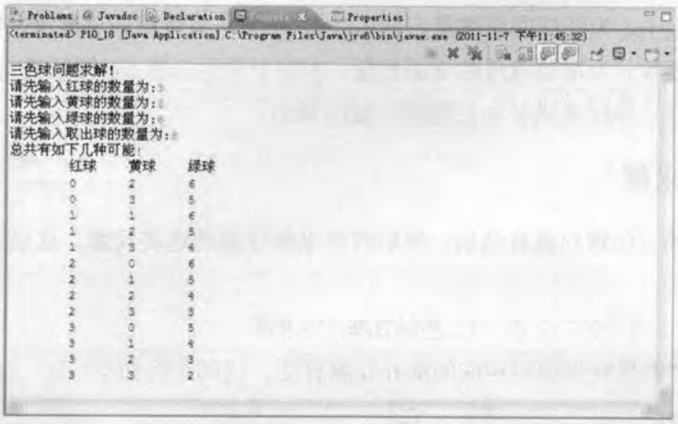


图 9-28　执行结果

9.19　小　　结

本章详细讲解了多种非常经典、非常有趣的算法问题。有些是历史上非常有名的典故或者问题，有些是非常有趣的智力问题。通过这些问题，读者可以领略到算法在解决实际问题中的应用。本章在介绍各个问题的时候，给出了相应的算法和求解实例。读者通过本章，可以锻炼程序设计能力、拓展思路，并提高学习算法的兴趣。

第 10 章　游戏中的算法

在现代程序设计中，算法的一个重要应用便是在游戏中。很多游戏都是人机对战，这样对于游戏者的操作，计算机应该计算出对应的策略。好的游戏算法将大大提高游戏的运行速度，使得游戏更加耐玩。本章将通过一些典型的算法，来看看算法在游戏中的应用。

10.1　洗扑克牌算法

扑克牌是一种非常大众化的游戏，在计算机中有很多与扑克牌有关的游戏。例如，在 Windows 操作系统下自带的纸牌、红心大战等。在扑克牌类的游戏中，往往都需要执行洗牌操作，就是将一副牌完全打乱，使其排列没有规律。我们本节将介绍一种洗扑克牌算法。

10.1.1　洗扑克牌算法

我们先来分析一下如何洗扑克牌。一副扑克牌共有 52 张，4 种花色（方片、红心、黑桃、梅花）。我们可以随机生成扑克数和花色，但是随机生成的数据容易和前面的数据重复。这里，我们采用随机随机换牌的方法来洗牌，操作步骤如下：

（1）首先，按照顺序生成一副扑克牌。

（2）然后，生成 1~52 中的一个随机数，按这个随机数从扑克牌中取牌、换牌。

（3）重复执行步骤（2）52 次，以达到洗牌的目的。

我们可以按照这个思路来编写相应的洗扑克牌算法，代码示例如下：

```
void Shuffle()                                    //算法
{
    int i,j,temp;
    int suit;

    Card tempcard=new Card();

    suit=0;
for (i = 0; i < 52; i++)                          //生成 52 张牌
    {
        if (i % 13 == 0)
```

```
            {
                suit++;                              //改变花色
            }
            Card t=new Card();
            t.Suit = suit;                           //保存花色
            temp = i % 13;
            switch(temp)                             //特殊值处理
            {
            case 0:
                t.Number = 'A';
                break;
            case 9:
                t.Number = '0';
                break;
            case 10:
                t.Number = 'J';
                break;
            case 11:
                t.Number = 'Q';
                break;
            case 12:
                t.Number = 'K';
                break;
            default:
                t.Number =(char)(temp + '1');
            }
            OneCard[i]=t;

        }
        System.out.printf("一付新牌的初始排列如下:\n");

        ShowCard();

        Random r=new Random();                       //随机种子
        for (i = 0; i < 52; i++)
        {
            j = r.nextInt(52);                       //随机换牌
            tempcard = OneCard[j];
            OneCard[j] = OneCard[i];
            OneCard[i] = tempcard;
        }
    }
```

这里，程序中首先按照顺序生成牌和花色。然后，显示生成的扑克牌。接着初始化随机种子，并随机换牌，将牌的顺序打乱，达到洗牌的效果。读者可以对照前面的算法来加深理解。

10.1.2 洗扑克牌实例

有了上述通用的洗扑克牌算法后，这里给出完整的洗扑克牌程序代码：

【程序 10-1】

```
import java.util.Random;

class Card
{
```

```
    int Suit;                                              //花色
    char Number;                                           //牌数
}

public class P11_1 {
    static Card[] OneCard=new Card[52];                    //保存每张扑克的花色、数字

    static void ShowCard()                                 //显示扑克牌
    {
        int i, j;
        int sign=0;
        String s="";

        for (i = 0, j = 0; i < 52; i++, j++)
        {
            if (j % 13==0)
            {
                System.out.print("\n");
            }
            switch(OneCard[i].Suit)                        //显示花色符号
            {
            case 1:
                s="黑桃";
                sign=3;
                break;
            case 2:
                s="红桃";
                sign=4;
                break;
            case 3:
                s="梅花";
                sign=5;
                break;
            case 4:
                s="方块";
                sign=6;
                break;
            default:
                ;
            }
            System.out.printf("    "+s+OneCard[i].Number);    //输出显示
        }
        System.out.print("\n");
    }

    static void Shuffle()                                  //算法
    {
        int i,j,temp;
        int suit;

        Card tempcard=new Card();

        suit=0;
        for (i = 0; i < 52; i++)                           //生成 52 张牌
        {
```

```
            if (i % 13 == 0)
            {
                suit++;                                    //改变花色
            }
            Card t=new Card();
            t.Suit = suit;                                 //保存花色
            temp = i % 13;
            switch(temp)                                   //特殊值处理
            {
            case 0:
                t.Number = 'A';
                break;
            case 9:
                t.Number = '0';
                break;
            case 10:
                t.Number = 'J';
                break;
            case 11:
                t.Number = 'Q';
                break;
            case 12:
                t.Number = 'K';
                break;
            default:
                t.Number =(char)(temp + '1');
            }
            OneCard[i]=t;

        }
        System.out.printf("一付新牌的初始排列如下:\n");

        ShowCard();

        Random r=new Random();                             //随机种子
        for (i = 0; i < 52; i++)
        {
            j = r.nextInt(52);                             //随机换牌
            tempcard = OneCard[j];
            OneCard[j] = OneCard[i];
            OneCard[i] = tempcard;
        }
    }
    public static void main(String[] args) {

        Shuffle();                                         //洗牌
        System.out.print("\n 洗牌后的排列如下:\n");
        ShowCard();                                        //显示新牌的排列
    }
}
```

在该程序中，方法 ShowCard()用于输出显示扑克牌的排列。其中，对于花色，也可以采用 ASCII 码中的特殊符号来表示。

在主方法中，首先调用 Shuffle()方法进行洗牌，然后输出显示新牌的排列。执行该程序，得到如下结果，如图 10-1 所示。

图 10-1　执行结果

10.2　取火柴游戏算法

取火柴游戏是一个非常有趣的智力游戏，所使用的工具非常简单，只使用火柴或者其他类似的物品就可以。取火柴游戏的规则是这样的：有 n 根火柴，每个人每次最多取 4 根火柴，最少取 1 根火柴。如果某个人取到最后一根火柴则输了。

10.2.1　取火柴游戏算法

我们先来分析一下取火柴游戏。当 n=21 时，取火柴游戏就是前面一章介绍的常胜将军问题。只不过这里进行了推广，火柴的数量可以为任意值。此时，由用户和计算机来对战。计算机可以采用在 1~4 之间随机取火柴。但是计算机为了保证能赢，当剩余火柴数量少于等于 5 个的时候，计算机取火柴使剩余的火柴为 1 根。

我们可以按照这个思路来编写相应的取火柴游戏算法，代码示例如下：

```
void quhuochai()                                        //游戏算法
{
    Random r=new Random();                              //随机种子
    while(true)
    {
        System.out.printf(" ---------   目前还有火柴 %d 根 ----------\n",last);
        System.out.printf("用户取火柴数量:") ;

        user=input.nextInt();                           //用户取火柴数量
        if(user<1 || user>4 || user>last)
        {
            System.out.printf("你违规了，你取的火柴数有问题!\n\n");
            continue;
        }
        last = last - user;                             //剩余火柴数量
        if(last == 0)
        {
            System.out.printf("\n 用户取了最后一个火柴,因此计算机赢了!\n");
            break;
        }
        else
        {
            if(last>5)                                  //计算机取火柴数量
            {
```

```
                computer=r.nextInt(5);
            }
            else if(last<=1)
            {
                computer=1;
            }
            else
            {
                computer=last-1;
            }
            last = last - computer;
            System.out.printf("计算机取火柴数量:%d   \n",computer);
            if(last == 0)
            {
                System.out.printf("\n 计算机取了最后一根火柴,因此用户赢了!\n");
                break;
            }
        }
    }
}
```

这里，每次抽取都判断一下是否违规，并且计算剩余的火柴数量 last。第一次由用户输入，然后计算机根据前面的算法思路来抽取，直至所有的火柴都抽取完毕。

10.2.2 取火柴游戏实例

有了上述通用的取火柴游戏算法后，这里给出完整的取火柴游戏程序代码：

【程序 10-2】

```
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;

public class P11_2
{
    static int computer,user,last;
    static Scanner input=new Scanner(System.in);
    static void quhuochai()                          //游戏算法
    {
        Random r=new Random();                       //随机种子
        while(true)
        {
            System.out.printf(" ----------   目前还有火柴 %d 根 ----------\n",last);
            System.out.printf("用户取火柴数量:") ;

            user=input.nextInt();                    //用户取火柴数量
            if(user<1 || user>4 || user>last)
            {
                System.out.printf("你违规了，你取的火柴数有问题!\n\n");
                continue;
            }
            last = last - user;                      //剩余火柴数量
            if(last == 0)
            {
                System.out.printf("\n 用户取了最后一个火柴,因此计算机赢了!\n");
```

```
                break;
            }
            else
            {
                if(last>5)                                          //计算机取火柴数量
                {
                    computer=r.nextInt(5);
                }
                else if(last<=1)
                {
                    computer=1;
                }
                else
                {
                    computer=last-1;
                }
                last = last - computer;
                System.out.printf("计算机取火柴数量:%d    \n",computer);
                if(last == 0)
                {
                    System.out.printf("\n 计算机取了最后一根火柴,因此用户赢了!\n");
                    break;
                }
            }
        }
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        int num;
        System.out.printf("取火柴游戏！ \n");
        System.out.printf("请先输入火柴的总量为:");
        num=input.nextInt();                                        //火柴的总量
        System.out.printf("火柴的总量为%d：  ",num);
        last=num;
        quhuochai();                                                //执行游戏
    }
}
```

在该程序中，首先由用户输入火柴的总量，然后调用 quhuochai()方法开始游戏。游戏中，用户先抽取火柴，计算机根据前面的策略来操作。

执行该程序，输入火柴的总量 25，得到如下结果，如图 10-2 所示。

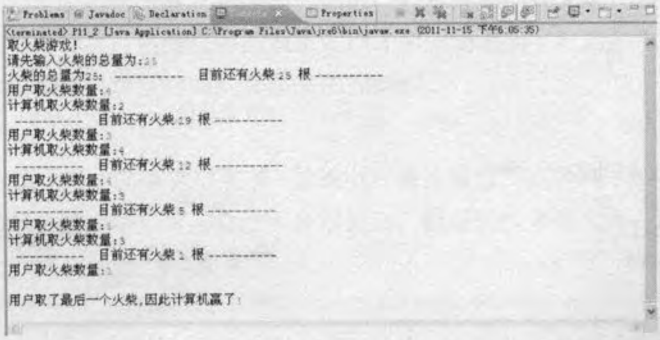


图 10-2　执行结果

10.3　10 点半算法

10 点半是一个典型的扑克牌游戏。10 点半的游戏规则如下：

一副扑克，大于等于 10 的记为 0.5，其他的按照其点数记。首先，经过洗牌后，各玩家依次取一张牌。然后，各玩家根据自己牌点数的大小决定是否继续要牌，最后由玩家牌的点数大小来决定胜负，点数大的则赢。如果某个玩家点数总和超过 10.5 则称为炸掉，炸掉后成绩为 0。

10.3.1　10 点半算法

我们先来分析一下 10 点半游戏。游戏者不仅要保证自己的点数最大，还要防止被炸掉，这就是 10 点半的好玩之处。由于在 10 点半游戏中，扑克牌中大于等于 10 的记为 0.5。因此，为了能够统计玩家的点数，这里定义了如下数据结构：

```
class Card2
{
    int Suit;                                   //花色
    char Number;                                //牌数
    double Num;
}
Card2[] OneCard=new Card2[52];                  //保存每张扑克的花色、数字
```

这里，使用 Suit 代表花色，使用 Number 代表牌数，而使用 Num 代表游戏中的点数。结构数组 OneCard 保存每张扑克的花色、数字和点数，用于在游戏中发牌。

1．改进的洗牌算法

在每次开始游戏之前都需要洗牌。这里，可以借鉴前面洗牌的算法。但是由于扑克牌中大于等于 10 的记为 0.5，我们在游戏中使用前面结构中 Num 来保存每一张牌的实际点数。这样，我们便可以对前述洗牌算法进行改进，代码示例如下：

```
void Shuffle()                                  //算法
{
     int i,j,temp;
     int suit;

     Card2 tempcard=new Card2();

     suit=0;
      for (i = 0; i < 52; i++)                  //生成 52 张牌
{
         if (i % 13 == 0)
         {
             suit++;                            //改变花色
         }
         Card2 t=new Card2();
         t.Suit = suit;                         //保存花色
         temp = i % 13;
         switch(temp)                           //特殊值处理
         {
           case 0:
                t.Number = 'A';
```

```
                break;
            case 9:
                t.Number = '0';
                break;
            case 10:
                t.Number = 'J';
                break;
            case 11:
                t.Number = 'Q';
                break;
            case 12:
                t.Number = 'K';
                break;
            default:
                t.Number =(char)(temp + '1');
            }

            if (temp >= 10)                          //记 0.5 点
                {
                    t.Num = 0.5;
                }
            else
                {
                    t.Num = (double)(temp + 1);
                }
            OneCard[i]=t;

        }
        System.out.printf("一付新牌的初始排列如下:\n");

        ShowCard();

        Random r=new Random();                       //随机种子
        for (i = 0; i < 52; i++)
        {
            j = r.nextInt(52);                       //随机换牌
            tempcard = OneCard[j];
            OneCard[j] = OneCard[i];
            OneCard[i] = tempcard;
        }
}
```

这里，程序中首先按照顺序生成牌和花色。然后，显示生成的扑克牌。接着初始化随机种子，并随机换牌，将牌的顺序打乱，达到洗牌的效果。程序中，还增加了对结构中 Num 的赋值，用于保存游戏中的点数。读者可以对照前面的算法来加深理解。

2. 10 点半算法

在 10 点半游戏的算法中，需要完成发牌、累积用户和计算机的点数、判断各自的点数是否炸了、显示点数和牌以及最终的游戏结果等。算法不是很复杂，但需要认真处理每一种情况。10 点半算法的代码示例如下：

```
void tenhalf()                                       //10 点半算法
{
    int i, count = 0;                                //count 为牌的计数器
```

```
        int iUser = 0, iComputer = 0;                           //iUser 为游戏者牌的数量,iComputer 为计算机
牌的数量
        int flag = 1, flagc = 1;
        String jixu,s="";
        Card2[] User=new Card2[20],Computer=new Card2[20];      //保存游戏者和计算机手中的牌
        float TotalU = 0, TotalC = 0;                           //统计游戏者和计算机的总点数
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        while (flag == 1 && count < 52)                         //还有牌，继续发牌
        {
            //游戏者取牌
            User[iUser++] = OneCard[count++];                   //发牌给游戏者
            TotalU += User[iUser - 1].Num;                      //累加游戏者总点数
            //接下为由计算机取牌
            if (count >= 52)                                    //牌已取完
            {
                flag = 0;
            }
            else if (TotalU > 10.5)                             //游戏者炸了
            {
                flagc = 0;                                      //计算机不再要牌
            }
            else
            {
                if ((TotalC < 10.5 && TotalC < TotalU) || TotalC < 7)
                {
                    Computer[iComputer++] = OneCard[count++];   //计算机取一张牌
                    TotalC += Computer[iComputer - 1].Num;      //累计计算机总点数
                }
            }
            System.out.printf("\n 用户的总点数为:%.1f\t", TotalU);
            System.out.printf("用户的牌为:");
            for (i = 0; i < iUser; i++)                         //显示用户的牌
            {
                switch(User[i].Suit)                            //显示花色符号
                {
                case 1:
                    s="黑桃";
                        break;
                case 2:
                    s="红桃";
                    break;
                case 3:
                    s="梅花";
                    break;
                case 4:
                    s="方块";
                    break;
                default:
                    ;
                }
                System.out.printf("    "+s+User[i].Number);
            }
            System.out.printf("\n");
            System.out.printf("计算机的总点数为:%.1f\t", TotalC);
            System.out.printf("计算机的牌为:");
```

```
for (i = 0; i < iComputer; i++)                          //显示计算机的牌
{
    switch(Computer[i].Suit)                             //显示花色符号
    {
    case 1:
        s="黑桃";
        break;
    case 2:
        s="红桃";
        break;
    case 3:
        s="梅花";
        break;
    case 4:
        s="方块";
        break;
    default:
        ;
    }
    System.out.printf("    "+s+Computer[i].Number);
}
System.out.printf("\n");
if (TotalU < 10.5)                                       //如果游戏者点数小于 10.5,可继续要牌
{
    do
    {
        System.out.printf("还要牌吗(y/n)?");
            jixu=input.next();
    }while (!jixu.equalsIgnoreCase("y") &&!jixu.equalsIgnoreCase("n"));
    if (jixu.equalsIgnoreCase("y"))                      //继续要牌
    {
        flag = 1;
    }
    else
    {
        flag = 0;
    }
    if (count == 52)
    {
        System.out.printf("牌已经发完了！ \n");
          break;
    }
}
else
    break;
}
while (flagc==1 && count < 52)                           //游戏者不要牌
{
    if (TotalU > 10.5)                                   //游戏者炸了
    {
        break;
    }
    else
    {
        if (TotalC < 10.5 && TotalC < TotalU)
```

```
            {
                Computer[iComputer++] = OneCard[count++];          //计算机取一张牌
                TotalC += Computer[iComputer - 1].Num;             //累计计算机取得牌的总点数
            }
            else
            {
                break;
            }
        }
    }
    System.out.printf("\n 用户的总点数:%.1f\t", TotalU);
    System.out.printf("用户的牌为:");
    for (i = 0; i < iUser; i++)                                    //显示用户的牌
    {
        switch(User[i].Suit)                                       //显示花色符号
            {
            case 1:
                s="黑桃";
                break;
            case 2:
                s="红桃";
                break;
            case 3:
                s="梅花";
                break;
            case 4:
                s="方块";
                break;
            default:
                ;
            }
            System.out.printf("    "+s+User[i].Number);
    }
    System.out.printf("\n");
    System.out.printf("\n 计算机的总点数为:%.1f\t", TotalC);
    System.out.printf("计算机的牌为:");
    for (i = 0; i < iComputer; i++)                                //显示计算机的牌
    {
        switch(Computer[i].Suit)                                   //显示花色符号
            {
            case 1:
                s="黑桃";
                break;
            case 2:
                s="红桃";
                break;
            case 3:
                s="梅花";
                break;
            case 4:
                s="方块";
                break;
            default:
                ;
            }
```

```
            System.out.printf("    "+s+Computer[i].Number);
    }
    System.out.printf("\n");
    if(TotalC == TotalU)                                        //输出游戏结果
    {
        System.out.printf("\n 用户和计算机打成了平手!\n");
    }
    else
    {
        if(TotalU > 10.5 && TotalC > 10.5)
        {
            System.out.printf("\n 用户和计算机打成了平手!\n");
        }
        else if(TotalU > 10.5)
        {
            System.out.printf("\n 你输了!继续努力吧!\n");
        }
        else if(TotalC > 10.5)
        {
            System.out.printf("\n 恭喜，用户赢了!\n");
        }
        else if(TotalC > TotalU)
        {
            System.out.printf("\n 你输了!继续努力吧!\n");
        }
        else
        {
            System.out.printf("\n 恭喜，用户赢了!\n");
        }
    }
}
```

在该函数中，用户和计算机来对战。程序根据用户的选择进行发牌。而对于计算机，程序将根据用户的点数决定是否继续要牌。最后，根据双方牌的点数大小判断谁赢得了胜利。为了让读者明白整个游戏流程，这里对于每一步都显示了双方的总点数和拥有牌的信息。

10.3.2 10 点半游戏实例

有了上述的 10 点半游戏算法后，这里给出完整的 10 点半游戏程序代码：

【程序 10-3】

```
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;

class Card2
{
    int Suit;                                                   //花色
    char Number;                                                //牌数
    double Num;
}

public class P11_3
{
    static Card2[] OneCard=new Card2[52];                       //保存每张扑克的花色、数字
    static void ShowCard()                                      //显示扑克牌
```

```
{
    int i, j;
    int sign=0;
    String s="";

    for (i = 0, j = 0; i < 52; i++, j++)
    {
        if (j % 13==0)
        {
            System.out.print("\n");
        }
        switch(OneCard[i].Suit)                          //显示花色符号
        {
        case 1:
            s="黑桃";
            sign=3;
            break;
        case 2:
            s="红桃";
            sign=4;
            break;
        case 3:
            s="梅花";
            sign=5;
            break;
        case 4:
            s="方块";
            sign=6;
            break;
        default:
            ;
        }
        System.out.printf("    "+s+OneCard[i].Number);      //输出显示
    }
    System.out.print("\n");
}

static void Shuffle()                                    //算法
{
    int i,j,temp;
    int suit;

    Card2 tempcard=new Card2();

    suit=0;
    for (i = 0; i < 52; i++)                             //生成 52 张牌
    {
        if (i % 13 == 0)
        {
            suit++;                                      //改变花色
        }
        Card2 t=new Card2();
        t.Suit = suit;                                   //保存花色
        temp = i % 13;
        switch(temp)                                     //特殊值处理
```

```
        {
        case 0:
            t.Number = 'A';
            break;
        case 9:
            t.Number = '0';
            break;
        case 10:
            t.Number = 'J';
            break;
        case 11:
            t.Number = 'Q';
            break;
        case 12:
            t.Number = 'K';
            break;
        default:
            t.Number =(char)(temp + '1');
        }
        if (temp >= 10)                            //记 0.5 点
            {
                t.Num = 0.5;
            }
        else
            {
                t.Num = (double)(temp + 1);
            }
        OneCard[i]=t;

    }
    System.out.printf("一付新牌的初始排列如下:\n");
    ShowCard();
    Random r=new Random();                         //随机种子
    for (i = 0; i < 52; i++)
    {
        j = r.nextInt(52);                         //随机换牌
        tempcard = OneCard[j];
        OneCard[j] = OneCard[i];
        OneCard[i] = tempcard;
    }
}

static void tenhalf()                              //10 点半算法
{
    int i, count = 0;                              //count 为牌的计数器
    int iUser = 0,iComputer = 0;                   //iUser 为游戏者牌的数量,iComputer 为计算机牌的数量
    int flag = 1, flagc = 1;
    String jixu,s="";
    Card2[] User=new Card2[20],Computer=new Card2[20];         //保存游戏者和计算机手中的牌
    float TotalU = 0, TotalC = 0;                  //统计游戏者和计算机的总点数
    Scanner input=new Scanner(System.in);
    while (flag == 1 && count < 52)                //还有牌，继续发牌
        {
        //游戏者取牌
        User[iUser++] = OneCard[count++];          //发牌给游戏者
```

```
TotalU += User[iUser - 1].Num;                    //累加游戏者总点数
//接下为由计算机取牌
if (count >= 52)                                  //牌已取完
{
    flag = 0;
}
else if (TotalU > 10.5)                           //游戏者炸了
{
    flagc = 0;                                    //计算机不再要牌
}
else
{
    if ((TotalC < 10.5 && TotalC < TotalU) || TotalC < 7)
    {
        Computer[iComputer++] = OneCard[count++];     //计算机取一张牌
        TotalC += Computer[iComputer - 1].Num;        //累计计算机总点数
    }
}
System.out.printf("\n 用户的总点数为:%.1f\t", TotalU);
System.out.printf("用户的牌为:");
for (i = 0; i < iUser; i++)                       //显示用户的牌
{

     switch(User[i].Suit)                         //显示花色符号
     {
     case 1:
          s="黑桃";
          break;
     case 2:
          s="红桃";
          break;
     case 3:
          s="梅花";
          break;
     case 4:
          s="方块";
          break;
     default:
          ;
     }
     System.out.printf("    "+s+User[i].Number);
}
System.out.printf("\n");
System.out.printf("计算机的总点数为:%.1f\t", TotalC);
System.out.printf("计算机的牌为:");
for (i = 0; i < iComputer; i++)                   //显示计算机的牌
{
     switch(Computer[i].Suit)                     //显示花色符号
     {
     case 1:
          s="黑桃";
          break;
     case 2:
          s="红桃";
          break;
```

```
            case 3:
                s="梅花";
                break;
            case 4:
                s="方块";
                break;
            default:
                ;
            }
            System.out.printf("    "+s+Computer[i].Number);
        }
        System.out.printf("\n");
        if (TotalU < 10.5)                              //如果游戏者点数小于 10.5,可继续要牌
        {
            do
            {
                System.out.printf("还要牌吗(y/n)?");

                jixu=input.next();
            }while (!jixu.equalsIgnoreCase("y") &&!jixu.equalsIgnoreCase("n"));
            if (jixu.equalsIgnoreCase("y"))             //继续要牌
            {
                flag = 1;
            }
            else
            {
                flag = 0;
            }
            if (count == 52)
            {
                System.out.printf("牌已经发完了！ \n");

                break;
            }
        }
        else
            break;
    }
    while (flagc==1 && count < 52)                      //游戏者不要牌
    {
        if (TotalU > 10.5)                              //游戏者炸了
        {
            break;
        }
        else
        {
            if (TotalC < 10.5 && TotalC < TotalU)
            {
                Computer[iComputer++] = OneCard[count++]; //计算机取一张牌
                TotalC += Computer[iComputer - 1].Num;    //累计计算机取得牌的总点数
            }
            else
            {
                break;
            }
        }
```

```
    }
    System.out.printf("\n 用户的总点数:%.1f\t", TotalU);
    System.out.printf("用户的牌为:");
    for (i = 0; i < iUser; i++)                         //显示用户的牌
    {
        switch(User[i].Suit)                            //显示花色符号
            {
            case 1:
                s="黑桃";
                break;
            case 2:
                s="红桃";
                break;
            case 3:
                s="梅花";
                break;
            case 4:
                s="方块";
                break;
            default:
                ;
            }
            System.out.printf("    "+s+User[i].Number);
    }
    System.out.printf("\n");
    System.out.printf("\n 计算机的总点数为:%.1f\t", TotalC);
    System.out.printf("计算机的牌为:");
    for (i = 0; i < iComputer; i++)                     //显示计算机的牌
    {
        switch(Computer[i].Suit)                        //显示花色符号
            {
            case 1:
                s="黑桃";
                break;
            case 2:
                s="红桃";
                break;
            case 3:
                s="梅花";
                break;
            case 4:
                s="方块";
                break;
            default:
                ;
            }
            System.out.printf("    "+s+Computer[i].Number);
    }
    System.out.printf("\n");

    if(TotalC == TotalU)                                //输出游戏结果
    {
        System.out.printf("\n 用户和计算机打成了平手!\n");
    }
    else
```

```
        {
            if(TotalU > 10.5 && TotalC > 10.5)
            {
                System.out.printf("\n 用户和计算机打成了平手!\n");
            }
            else if(TotalU > 10.5)
            {
                System.out.printf("\n 你输了!继续努力吧!\n");
            }
            else if(TotalC > 10.5)
            {
                System.out.printf("\n 恭喜，用户赢了!\n");
            }
            else if(TotalC > TotalU)
            {
                System.out.printf("\n 你输了!继续努力吧!\n");
            }
            else
            {
                System.out.printf("\n 恭喜，用户赢了!\n");
            }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        System.out.printf("10 点半游戏！ \n");
        Shuffle();                                          //洗牌
        tenhalf();                                          //开始游戏
    }
}
```

在该程序中，主方法比较简单，首先调用 Shuffle()方法洗牌、然后调用方法 tenhalf()开始游戏。一局游戏结束的时候，根据用户的输入来决定是否继续游戏。

执行该程序，与计算机玩一局 10 点半游戏，执行结果如下，如图 10-3 所示。

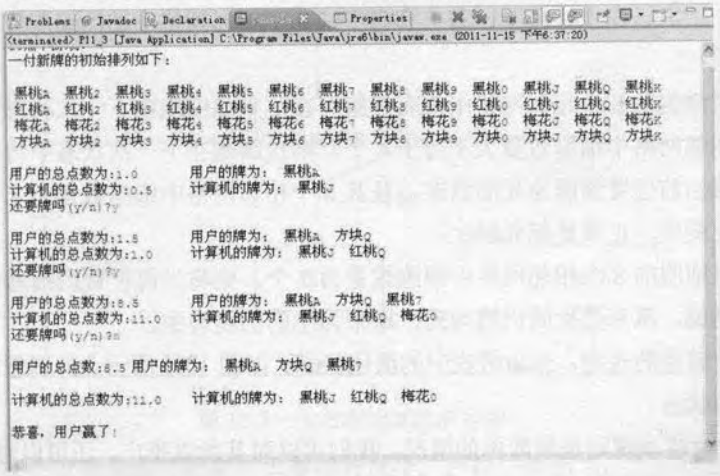


图 10-3　执行结果

10.4 生 命 游 戏

生命游戏又称为细胞自动机游戏，或者元胞自动机游戏。生命游戏是英国数学家 J. H. Conway 首次提出的。在 1970 年，J. H. Conway 小组正在研究一种细胞自动装置，J. H. Conway 从中获得启发，提出了一种生命游戏，然后将其发表在《科学美国人》的“数学游戏”专栏。

生命游戏是一个典型的零玩家游戏，只需要用户输入初始的细胞分布，然后细胞便按照规则进行繁殖演化。生命游戏反映了生命演化和秩序的关系，具有很深刻的含义，在地理学、经济学、计算机科学等领域得到了非常广泛的应用。

10.4.1 生命游戏的原理

生命游戏的规则比较简单，其假定细胞的生活环境是二维的。在一个有限的二维空间中，每一个方格居住着一个细胞，细胞的状态为活或死。在演化过程中，每个细胞在下一个时刻的生死状态，取决于相邻八个方格中活着的或死了的细胞的数量。有如下几种情况：

- 如果相邻方格活着的细胞数量过多，会造成资源匮乏，这个细胞将在下一个时刻死去；
- 如果相邻方格活着的细胞数量过少，这个细胞会因太孤单而死去。

在这个游戏中，用户可以扮演上帝的角色，设定周围活细胞的数目是多少时才适宜该细胞的生存。这个数目直接导致了整个生命的状态：

- 如果这个数目设置的过高，那么细胞将感觉到周围的邻居太少，更多的细胞将孤独而死，最后经过演化整个世界都没有生命；
- 如果这个数目设置得过低，经过演化整个世界中将充满生命。
- 如何这个数目设置得合适，这样整个生命世界才不至于太过荒凉或者过于拥挤，经过演化，整个世界将达到一种动态平衡。一般来说，这个数目一般选取 2 或者 3。

通过计算机编程，我们可以清楚地观察到生命游戏中细胞的演化规则。这里，假定二维平面有 10×10 的方格作为细胞活动的空间。每个方格中放置一个生命细胞。对其中一个细胞来说，其存活取决于上、下、左、右、左上、左下、右上和右下共 8 个相邻网格中的活细胞数量。我们按照如下的规则来进行游戏：

- 死亡：如果细胞的 8 个相邻网格中没有细胞存在，则该细胞在下一次状态中将孤单死亡；如果细胞的相邻网格中细胞数量大于等于 4 个，则该细胞在下一次状态中将因为拥挤而死亡；
- 复活：如果当前位置细胞为死的状态，且其 8 个相邻网格中细胞数量为 3 个，则将当前位置的细胞由死变生，也就是起死回生；
- 不变：如果细胞的 8 个相邻网格中细胞数量为 2 个，则将当前位置的细胞保持原来的生存状态。也就是说，原来是死的仍然为死，原来为生的仍然为生。

按照上述生命游戏的规则，生命游戏中的演化状态，如图 10-4 所示。最理想的情况下，希望得到一个动态平衡的状态。

其实，上述生命游戏规则是最简单的情况。我们可以对其加以推广，还可以考虑如下一些情况：

- 3 维空间中的生命游戏。
- 定义更为复杂的规则，例如考虑父辈细胞和子辈细胞的关系。

- 用户中途，单独设定某个细胞死活来观察演化过程，看看是否存在领袖级细胞。所谓领袖级细胞就是该细胞死后，将导致整个生命演化过程从动态平衡进入一种单独状态。

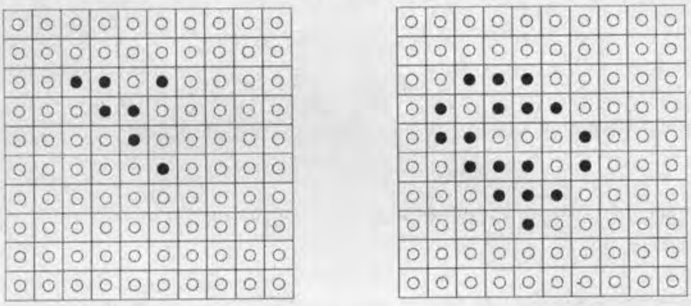


图 10-4 生命游戏中的演化状态

10.4.2 生命游戏的算法

其实实现生命游戏并不复杂，我们主要在程序中逐个统计每个细胞四周的活细胞数量，根据这个数量按照前面的规则决定当前细胞的生存状态。生命游戏算法的流程图，如图 10-5 所示。生命游戏算法的执行过程如下：

（1）对于第 i 个单元格，取出其中细胞的生存状态。

（2）如果其四周活细胞的数量为 2，则其保持原状态，继续执行步骤（5）。

（3）如果其四周活细胞的数量为 3，则复活该细胞，继续执行步骤（5）。

（4）如果四周活细胞的数量为其他值，则该细胞死亡，继续执行步骤（5）。

（5）判断是否所有的单元格执行完毕，如果没有，则继续从步骤（1）开始。

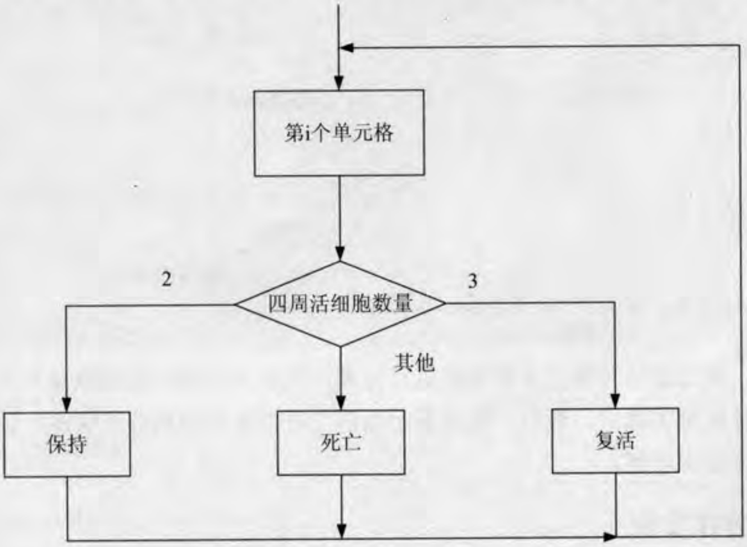


图 10-5 生命游戏算法流程图

我们可以按照这个思路来编写相应的生命游戏算法，代码示例如下：

```
void cellfun()                                   //生命游戏算法
{
```

```
    int row, col,sum;
    int count=0;

    for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
    {
            for (col = 0; col < COLLEN; col++)
            {
                switch (LinSum(row, col))                   //四周活细胞数量
                {
                case 2:
                    celltemp[row][col] = cell[row][col];    //保持细胞原样
                    break;
                case 3:
                    celltemp[row][col] = ALIVE;             //复活
                    break;
                default:
                    celltemp[row][col] = DEAD;              //死去
                }
            }
        }
        for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
        {
            for (col = 0; col < COLLEN; col++)
            {
                cell[row][col] = celltemp[row][col];
            }
        }
        for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
        {
            for (col = 0; col < COLLEN; col++)
            {
                if(cell[row][col] == ALIVE)                 //若是活细胞
                {
                    count++;                                //累加活细胞数量
                }
            }
        }
        sum=count;

        OutCell();                                          //输出显示当前细胞状态
        System.out.printf("当前状态下，共有%d 个活细胞。\n",sum);
    }
```

在该程序中，通过循环对每一个单元格进行处理，判断其四周活细胞数量来决定该细胞的生死状态。然后，统计活细胞数量。最后，输出显示当前二维世界中细胞分布状态。读者可以参阅前面对生命游戏规则来加深理解。

10.4.3 生命游戏实例

有了上述的生命游戏算法后，这里给出完整的生命游戏程序代码：

【程序 10-4】

```
import java.util.Scanner;
```

```
public class P11_4
{
    static final int ROWLEN=10;                                 //二维空间行数
    static final int COLLEN=10;                                 //二维空间列数
    static final int DEAD=0;                                    //死细胞
    static final int ALIVE=1;                                   //活细胞
    static int[][] cell=new int[ROWLEN][COLLEN];                //当前生命细胞的状态
    static int[][] celltemp=new int[ROWLEN][COLLEN];            //用于判断当前的细胞的下一个状态

    static void initcell()                                      //初始化细胞分布
    {
        int row, col;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        for (row = 0; row < ROWLEN; row++)                      //先全部初始化为死状态
        {
            for (col = 0; col < COLLEN; col++)
            {
                cell[row][col] = DEAD;
            }
        }
        System.out.printf("请先输入一组活细胞的坐标位置，输入(-1 -1)结束:\n");
        while (true)
        {
            System.out.printf("请输入一个活细胞的坐标位置：");
            row=input.nextInt();
            col=input.nextInt();                                //输入活细胞坐标
            if (0 <= row && row < ROWLEN && 0 <= col && col < COLLEN)
            {
                cell[row][col] = ALIVE;                         //保存活细胞
            }
            else if (row == -1 || col == -1)
            {
                break;
            }
            else
            {
                System.out.printf("输入坐标超过范围。\n");
            }
        }
    }

    static int LinSum(int row, int col)                         //统计四周细胞数量
    {
        int count = 0, c, r;

        for (r = row - 1; r <= row + 1; r++)
        {
            for (c = col - 1; c <= col + 1; c++)
            {
                if (r < 0 || r >= ROWLEN || c < 0 || c >= COLLEN)
                {
                    continue;                                   //处理下一个单元格
                }
                if (cell[r][c] == ALIVE)                        //如果为活细胞
                {
```

```
                count++;                                    //增加活细胞的数量
            }
        }

    }
    if (cell[row][col] == ALIVE)                            //当前单元格为活细胞
    {
        count--;
    }
    return count;                                           //返回四周活细胞总数
}

static void OutCell()                                       //输出显示细胞状态
{
    int row, col;

    System.out.printf("\n 细胞状态\n");
    System.out.printf(" ┌");
    for (col = 0; col < COLLEN -1; col++)                   //输出一行
    {
        System.out.printf("─┬");
    }
    System.out.printf("─┐ \n");
    for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
    {
        System.out.printf(" │ ");
        for (col = 0; col < COLLEN; col++)                  //输出各单元格中细胞的生存状态
        {
            switch(cell[row][col])
            {
            case ALIVE:
                System.out.printf("● │ ");                 //●代表活细胞
                break;
            case DEAD:
                System.out.printf("○ │ ");                 //○代表死细胞
                break;
            default:
                ;
            }
        }
        System.out.printf("\n");

        if (row < ROWLEN - 1)
        {
            System.out.printf(" ├");
            for (col = 0; col < COLLEN - 1; col++)          //输出一行
            {
                System.out.printf("─┼");
            }
            System.out.printf("─┤ \n");
        }
    }
    System.out.printf(" └");
    for (col = 0; col < COLLEN - 1; col++)                  //最后一行的横线
    {
```

```
            System.out.printf("─┴─");
        }
        System.out.printf("─┘ \n");
    }

    static void cellfun()                                   //生命游戏算法
    {
        int row, col,sum;
        int count=0;

         for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
            {
                for (col = 0; col < COLLEN; col++)
                {
                    switch (LinSum(row, col))               //四周活细胞数量
                    {
                    case 2:
                        celltemp[row][col] = cell[row][col];    //保持细胞原样
                        break;
                    case 3:
                        celltemp[row][col] = ALIVE;         //复活
                        break;
                    default:
                        celltemp[row][col] = DEAD;          //死去
                    }
                }
            }
            for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
            {
                for (col = 0; col < COLLEN; col++)
                {
                    cell[row][col] = celltemp[row][col];
                }
            }
            for (row = 0; row < ROWLEN; row++)
            {
                for (col = 0; col < COLLEN; col++)
                {
                    if(cell[row][col] == ALIVE)             //若是活细胞
                    {
                        count++;                            //累加活细胞数量
                    }
                }
            }
            sum=count;

            OutCell();                                      //输出显示当前细胞状态
            System.out.printf("当前状态下，共有%d 个活细胞。\n",sum);
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        String go;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.printf("生命游戏！\n");
```

```
        initcell();                                    //初始化
        OutCell();                                     //输出初始细胞状态
        do{
            cellfun();                                 //开始游戏
            System.out.print("\n 继续生成下一次细胞的状态(y/n)?");
            go=input.next();
            }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
            System.out.println("游戏结束！");
    }
}
```

在该程序中，ROWLEN 和 COLLEN 定义了二维世界的大小，数组 cell 保存了当前生命细胞的状态，数组 celltemp 用于判断当前细胞的下一个状态。程序中用到如下几个方法：

- 方法 initcell()，用于初始化二维世界中细胞的初始分布状态，由用户在开始时输入。
- 方法 LinSum()，用于统计一个单元格周围的活细胞总量。
- 方法 OutCell()，用于输出显示当前演化的二维世界中细胞的分布状态。
- 方法 cellfun()，生命游戏中的演化算法。

在主方法中，首先由用户初始化二维世界中细胞的分布状态并显示当前分布。然后，开始游戏，用户输入“y”则进行一次演化。用户可以通过不断的输入，来观察二维世界中细胞的演化过程。

执行该程序，我们这里输入初始的二维世界活细胞的分布如下为（3 3）、（3 4）、（3 5）、（3 6）、（4 4）、（4 5）、（4 7）、（5 5）和（5 6）。此时得到的细胞分布状态，如图 10-6 所示。

我们按照提示进行生命演化，图 10-7 显示了生命演化过程中的一个阶段的细胞状态。逐次进行演化，读者将会看多许多有趣的图形。

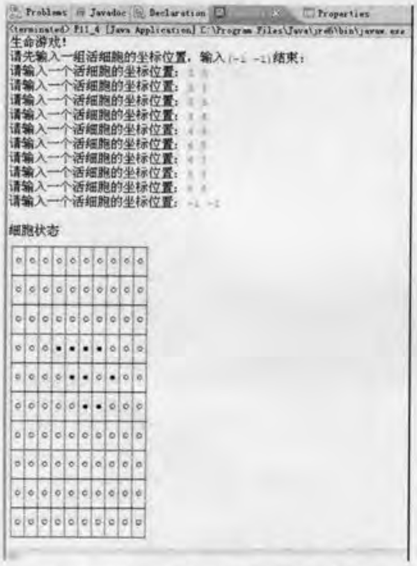


图 10-6　生命游戏初始状态

图 10-7　生命游戏中间演化过程

经过多次演化之后，这个二维生命世界将达到一个固定的平衡状态，如图 10-8 所示。此时，活细胞的分布将不再发生变化。如果读者输入的初始状态合适的话，应该可以达到更为理想的动态平衡。

读者可以多次执行该程序，以验证不同的初始输入状态。生命游戏含义非常深刻，揭示了生命世界的演化规则。

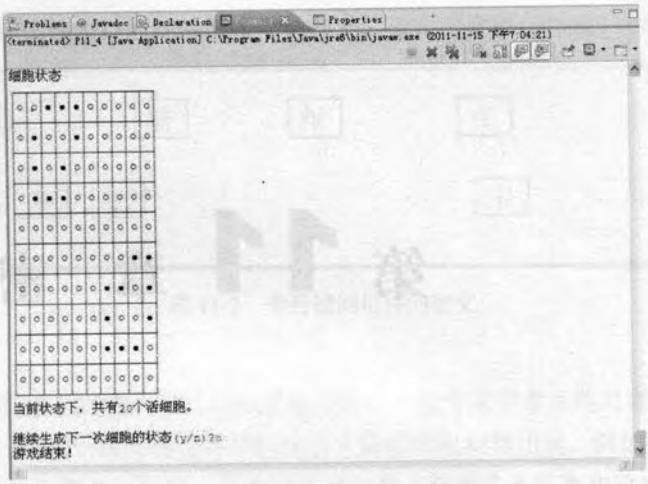


图 10-8 平衡状态

10.5 小 结

游戏是算法的一个重要应用场合。本章介绍了算法在一些经典游戏中的应用，例如扑克牌、取火柴以及含义深刻的生命游戏等。对于读者来说，通过本章的算法分析和实例，可以掌握算法的应用，体会到算法在解决实际问题中的作用。通过这些游戏算法，读者也可以增加学习算法的兴趣。读者应该认真掌握本章内容。

第 11 章　密码学概述

密码学是一门历史悠久、实用性很强的学科。密码学最初是伴随着政治和军事的需求而逐步发展起来的。随着时代的发展和技术的进步，特别是互联网时代的到来，个人信息安全已经成为重要的研究内容，成为密码学另一个重要的应用领域。本章将介绍密码学相关的基本知识和算法实例。

11.1　密码学概述

提到密码学，对于程序员来说往往比较激动。因为这其中牵扯到有关黑客的概念，黑客以基本成为高级程序员的代名词。本节简单回顾一下密码学的发展及相关知识，然后总结一下经典密码学中的加密解密算法方案。

11.1.1　密码学的发展

密码学的发展经历了几个主要的阶段，在有些文献中将其分为古典密码、近代密码和现代密码 3 个阶段。这里沿用了卿斯汉先生在其《密码学与计算机网络安全》一书中的分类，即密码学经历了初级阶段（手工阶段）、中级阶段（机械阶段）和高级阶段（电子与计算机阶段）。

1．初级阶段

在密码学的初级阶段，密码学的表现形式为手工密码，或者也可以称为艺术密码。这个阶段的密码主要服务于当时的军事和政治，密码的形式呈现多样化。加密和解密都依赖于密码设计者的创意或者智慧，而没有严格的理论推倒证明。例如意大利数学家卡丹（G. Cardan）发明的卡丹密码，又称网格式密码（grill cipher）。通信时将密文融入到一封看似普通的信件中，如图 11-1 所示。

> 王先生：
>
> 来信收悉，你的盛情真是难以报答。我已在昨天抵达广州。秋雨连绵，每天需备伞一把方能上街，苦矣。大约本月中旬我才能返回，届时再见。
>
> 弟　李明

图 11-1　卡丹密码信件

接收者采用一个事先约定好的网格纸叠在信件上，便可以恢复出密文，如图 11-2 所示。

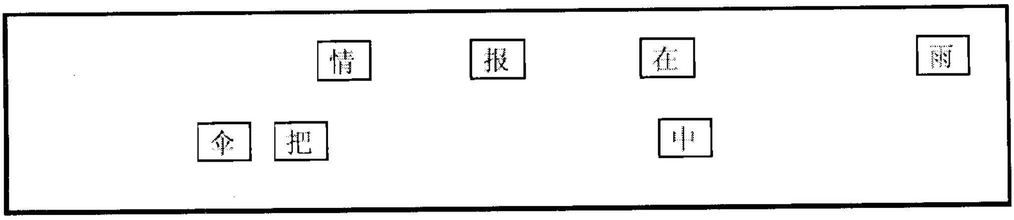


图 11-2　卡丹密码信件的密文

2．中级阶段

在密码学的中级阶段，密码学已经开始走向成熟，一些专家学者开始对密码学进行定量的分析和理论的证明。同时，依托于这些理论各种机械形式的密码机相继出现。例如德国的 Enigma、美国的 Sigaba 以及日本的 Red 和 Purple 等。这个时期也还是主要服务于军事和政治。

3．高级阶段

在密码学的高级阶段，密码开始从军事和政治中走向民用。这都依赖于计算机以及现代通信技术的发展，同时各种私钥密码算法体系（例如 DES 算法、AES 算法等）和公钥密码算法体系（例如 RSA 算法等）的出现也极大地促进了密码学应用的普及。这个时期，密码机开始走出机械化，普遍采用电子和计算机技术来实现。德国学者 T. Beth 有过一句精辟的总结“突然，现代密码学从半军事性的角落里解脱出来，一跃成为通信科学一切领域中的中心研究课题”。

同时，随着密码学的不断发展，现在的密码学以及不局限于传统的信息加密解密。目前，密码学以及开辟了数字签名、共享秘密等新的领域。

11.1.2　密码学的基本概念

密码学是一门比较广泛的学问，往往涉及攻防两方面。密码学就是在敌对双方不断“攻”和“防”的发展中逐步走向成熟的。密码学的一个简单定义如下：

密码学=密码编制学+密码分析学。

其中，密码编制学就是研究好的密码系统，保护信息不被敌方或者任何无关的第三方获得。密码分析学则是研究攻破一个密码系统的途径，将隐蔽的信息恢复出其本来面目。这样，通俗地说，密码学就是研究信息加密和破译密码的一门学问。

谈到密码学就要涉及密码系统。一个密码系统包含明文字母空间、密文字母空间、密钥空间和算法。而密码系统的两个基本单元是算法和密钥。其中：

- 明文字母空间：就是要传递信息明文字母的取值范围。
- 密文字母空间：就是加密后密文字母的取值范围。
- 密钥：在加密和解密过程中所用到的关键字。
- 密钥空间：就是密钥字母的取值范围。
- 算法：就是一些公式、法则或者程序，规定了明文和密文之间的变换方法。

一般来说，明文字母空间为字母或者汉字，依赖于不同国家或者系统的需要。密文字母空间依赖以不同的加密系统，一般也为字母或者汉字等。密钥则是一串随机的二进制序列。算法则比较丰富，有 DES 算法、AES 算法、RSA 算法等。

11.1.3 柯克霍夫斯原则

密码学是一门攻防兼备的技术。目前还没有精确地从理论上度量一个密码系统保密能力的方法。但有一个基本的原则就是破译者掌握的关于密码系统的知识越多，则成功破译的可能性就越大，也就是说对密码系统构成的威胁越大。按照破译者掌握知识程度的攻击，可以大体分为如下几类：

- 第 1 等级攻击，仅知算法的攻击——破译者仅知道密码系统所采用的加密和解密算法，而对密钥一无所知。
- 第 2 等级攻击，已知密文的攻击——破译者在知道前述知识的基础上，还能够搜集到传递的密文信息。
- 第 3 等级攻击，已知明文的攻击——破译者在知道前述知识的基础上，还能够搜集到某些明文和密文的对应关系。
- 第 4 等级攻击，选择明文的攻击——破译者在知道前述知识的基础上，还可以有选择地搜集到某些明文和密文的对应关系。
- 第 5 等级攻击，伪装发送者的攻击——破译者在知道前述知识的基础上，还可以像合法用户一样来使用密码系统发送加密的信息。
- 第 6 等级攻击，篡改攻击——破译者在知道前述知识的基础上，还可以改变、截获或者重发信息。

从上面这几条可以看到，越往后面破译者的能力越强，对密码系统的安全性破坏越大。但在一个密码系统设计时，往往只需要考虑经受第（1）和第（2）等级的攻击即可。而这一点，在 1883 年由柯克霍夫斯（A. kerchoffs）提出，即密码系统中的算法即使被破译者所知，也应该无助于用来推导出明文或者密钥。因此，现在这一原则被称为柯克霍夫斯原则，并被广泛接受。

这种假设是很合理的，因为如果假定算法具有绝对的安全性是不切合实际的。例如，敌方有可能猜到密码算法的形式，这在历史上有很多例子。例如，在二次世界大战中，德国的 Enigma 转轮密码机有些就被盟军缴获，盟军可以加以分析获得加密算法及密码机的工作原理。因此，假定密码算法的绝对安全是很危险的。而且，显而易见，如果一个密码系统的加密算法在公开的情况下，破译者仍无法进行有效的破译，那么更能保证这个密码系统的安全性。

11.1.4 经典密码学算法

经典密码学大致可以分为传统密码学和现代密码学两类。了解经典密码学可以加深对密码体系的理解，传统密码学包括如下几种算法方案：

- 换位密码算法方案：其是根据一定的规则重新安排明文字母，使之成为密文。换位密码可以分为列换位密码和周期换位密码两类。
- 单表代替密码算法方案：其将明文中的每个字母用密文中对应的字母代替。
- 同音代替密码算法方案：其是明文字符和密文字符之间的一多映射，每个明文字符可以变换成不同的密文字符。
- 多表代替密码算法方案：其用多个映射把明文字符转换为密文字符，其中每个映射相当于单表代替密码中的一一映射。
- 多字母组代替密码算法方案：这是最一般的代替密码，可以对一组字符进行任何方式的代替。

- 转轮密码机算法方案：这是密码学机械化的产物。典型的转轮密码机由打字机和若干个转轮组成，每个转轮的两面各有 26 个电接点，分别代表一个字母。前面的每个接点和后面的某个接点用导线相连，实现由明文字母到密文字母的一个映射。转轮密码机在第二次世界大战中的应用最多。

现代密码学是广泛服务于当代社会的密码技术，其发展了一些崭新的思想，并结合了电子技术、计算机技术和程序设计技术等。现代密码学大体有如下几类：

- 序列密码算法方案：这是一种单钥密码算法，每次一位地对明文进行操作和运算，因此也称为流密码。
- 分组密码算法方案：这也是一种单钥密码算法，在执行时一次若干位一组地对明文进行操作和运算。
- 公钥密码算法方案：公钥密码的最大特点是采用两个相关密钥将加密和解密分开，其中一个密钥是公开的，称为公开密钥，用于加密；另一个密钥是为用户专用，因而是保密的，称为秘密密钥，用于解密。因此公钥密码体制也称为双钥密码体制。

11.2　换位加密解密算法

换位密码算法方案，又称为置换加密方案，其是根据一定的规则重新安排明文字母，使之成为密文。换位密码是最简单的密码学算法。

11.2.1　换位加密解密算法

换位密码算法有很多种，这里介绍基于二位数组移位的换位加密解密算法。二位数组移位的换位加密解密算法就是将明文字符串按照一个给定的顺序保存在二维数组中，然后按照另外一个顺序读出，便得到密文。执行相反的过程便可以恢复出明文。

例如，有一个字符串“Hello everyone!”，这里指定一个 4×4 的二维数组来保存该字符串，如图 11-3 所示。明文的方向为按行存储，从列的方向便可以读出密文“Ho ene reley!lvo”。执行相反的过程便可以恢复出明文字符串。

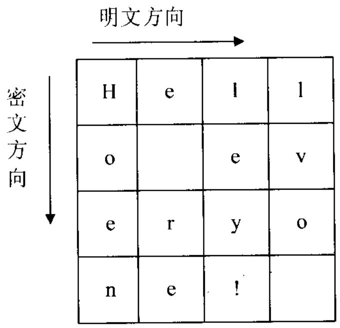


图 11-3　二维数组换位加密解密方案

1．换位加密算法

基于二位数组移位的加密算法的操作步骤如下：

（1）给定一个二维数组的列数，也就是该二维数组每行可以保存的字符个数。

（2）将明文字符串按行依次排列到该二维数组中。

（3）按列读出该二维数组中的字符，这样便得到密文。

我们可以根据这个思路来编写相应的加密算法，代码示例如下：

```
char[] jiami(char[] str,int n)                           //加密算法
{
    int i,j,k,d;
    int len;
    char[] temp,miwen,mtemp={};

    len=str.length;                                      //字符串长度
    if((d=len%n)!=0)
    {
        len=len+n-d;
    }

    if((temp=new char[len+1])==null)                     //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }

    if((miwen=new char[len+1])==null)                    //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }
    else
    {
        mtemp=miwen;
    }

    System.arraycopy(str,0,temp,0,str.length);
    for(i=str.length;i<len;i++)
    {
        temp[i]=32;
    }
    temp[len]='\0';
    i=0;
    for(k=0;k<n;k++)                                     //转换，加密
    {
        for(j=0;j<len/n;j++)
        {
            mtemp[i]=temp[k+j*n];
            i++;
        }
    }
    mtemp[i]='\0';
    temp=null;

    return miwen;                                        //返回密文
}
```

这里，输入参数 str 为明文字符串，输入参数 n 为指定的二维数组每行可以保存的字符个数。程序中严格遵循了前述算法，读者可以对照以加深理解。

2. 换位解密算法

基于二位数组移位的解密算法的操作步骤如下：

（1）给定一个二维数组的列数，也就是该二维数组每行可以保存的字符个数。这个数应该和加密算法中一致。

（2）将密文字符串按列依次排列到该二维数组中。

（3）按行读出该二维数组中的字符，这样便得到密文。

我们可以根据这个思路来编写相应的解密算法，代码示例如下：

```
char[] jiemi(char[] str,int n)                    //解密算法
{
    int i,j,k=0,d;
    int len;
    char[] temp,mingwen,mtemp={};

    len=str.length;

    if((d=len%n)!=0)
    {
        len=len-d;
    }
    n=len/n;
    if((temp=new char[len+1])==null)              //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }

    if((mingwen=new char[len+1])==null)           //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }
    else
    {
        mtemp=mingwen;
    }

    System.arraycopy(str,0,temp,0,str.length);
    for(i=str.length;i<len;i++)
    {
        temp[i]=32;
    }
    temp[len]='\0';
    i=0;
    for(k=0;k<n;k++)                               //恢复出明文
    {
        for(j=0;j<len/n;j++)
        {
            mtemp[i]=temp[k+j*n];
```

```
                i++;
            }
        }

        while(mtemp[--i]==32);
        i++;
        mtemp[i]='\0';
        return mingwen;                              //返回明文
    }
```

这里，输入参数 str 为密文字符数组，输入参数 n 为指定的二维数组每行可以保存的字符个数。程序中严格遵循了前述算法，读者可以对照以加深理解。

11.2.2 换位加密解密算法实例

有了前述的换位加密算法和换位解密算法之后，我们便可以进行字符串的加密解密操作。这里，通过一个例子来演示加密解密的操作过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 11-1】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.*;

public class P12_1
{
    static char[] jiami(char[] str,int n)               //加密算法
    {
        int i,j,k,d;
        int len;
        char[] temp,miwen,mtemp={};

        len=str.length;                                 //字符串长度
        if((d=len%n)!=0)
        {
            len=len+n-d;
        }

        if((temp=new char[len+1])==null)        //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }

        if((miwen=new char[len+1])==null)       //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        else
        {
            mtemp=miwen;
        }
```

```
        System.arraycopy(str,0,temp,0,str.length);
        for(i=str.length;i<len;i++)
        {
            temp[i]=32;
        }
        temp[len]='\0';
        i=0;
        for(k=0;k<n;k++)                              //转换，加密
        {
            for(j=0;j<len/n;j++)
            {
                mtemp[i]=temp[k+j*n];
                i++;
            }
        }
        mtemp[i]='\0';
        temp=null;

        return miwen;                                 //返回密文
    }

    static char[] jiemi(char[] str,int n)             //解密算法
    {
        int i,j,k=0,d;
        int len;
        char[] temp,mingwen,mtemp={};

        len=str.length;

        if((d=len%n)!=0)
        {
            len=len-d;
        }
        n=len/n;
        if((temp=new char[len+1])==null)              //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }

        if((mingwen=new char[len+1])==null)           //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        else
        {
            mtemp=mingwen;
        }

        System.arraycopy(str,0,temp,0,str.length);
        for(i=str.length;i<len;i++)
        {
            temp[i]=32;
        }
```

```
        temp[len]='\0';
        i=0;
        for(k=0;k<n;k++)                                    //恢复出明文
        {
            for(j=0;j<len/n;j++)
            {
                mtemp[i]=temp[k+j*n];
                i++;
            }
        }

        while(mtemp[--i]==32);
        i++;
        mtemp[i]='\0';
        return mingwen;                                     //返回明文
    }


    public static void main(String[] args) throws IOException
    {
        int n,i;
        char[] srcstr=new char[100];
        char[] miwen;
        String go;

        System.out.print("换位加密解密算法演示！\n");

        do{
        System.out.print("\n 请先输入换位加密矩阵每行的字符数：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();                                  //输入换位加密矩阵每行的字符数

        System.out.println("请输入明文：");
                                                            //输入明文字符串
        BufferedReader bufferedReader = new BufferedReader(new InputStreamReader (System.in));
        String str=bufferedReader.readLine();
        srcstr=str.toCharArray();

        System.out.print("输入的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
              System.out.print(srcstr[i]);
        }

        miwen=jiami(srcstr,n);                              //加密
        System.out.print("\n 加密后的密文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
                System.out.print(miwen[i]);
        }
        miwen=jiemi(miwen,n);                               //解密
        System.out.print("\n 解密出的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
```

```
                    System.out.print(miwen[i]);
            }

            System.out.print("\n 继续执行(y/n)?");
            go=input.next();
            }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
            System.out.println("演示结束！");
        }
}
```

在主函数中，首先由用户输入换位加密矩阵每行的字符数。然后，由用户输入明文字符串。接着，程序开始调用加密算法和解密算法演示加密和解密的过程。程序中输出了密文字符串以及解密出的明文字符串。

执行该程序，得到如下结果，如图 11-5 所示。

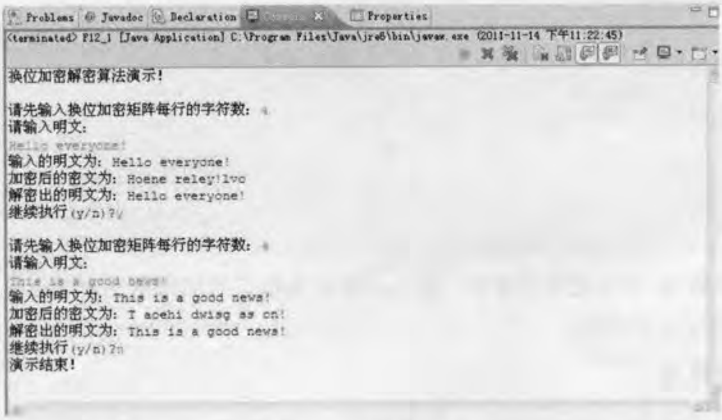


图 11-5　执行结果

11.3　替换加密解密算法

替换密码算法方案的起源可以追溯到恺撒（Caesar）时代，据说恺撒为了保障情报的可靠性而发明了恺撒密码。恺撒密码是一种简单的置换密码，在加密时，字母表中的每个字母都用其后的第三个字母表示，例如，a 用 d 表示，b 用 e 表示，……。在解密时，只需执行逆过程即可。

11.3.1　替换加密解密算法

经过历史的发展，替换密码算法方案涌现出很多种形式，主要有如下几种：

- 单表代替密码算法方案：其将明文中的每个字母用密文中对应的字母代替。
- 同音代替密码算法方案：其是明文字符和密文字符之间的一多映射，每个明文字符可以变换成不同的密文字符。
- 多表代替密码算法方案：其用多个映射把明文字符转换为密文字符，其中每个映射相当于单表代替密码中的一一映射。
- 多字母组代替密码算法方案：这是普通的代替密码，可以对一组字符进行任何方式的代替。

我们这里以单表代替密码算法方案为例进行介绍。

1. 替换加密算法

替换加密算法的基本方法是这样的，首先给定一个密钥 n，对应明文中的每一个字符的 ASCII 码都向后移动 n 而得到相应的密文。

我们按照这个思想来编写相应的加密算法，代码示例如下：

```
char[] jiami(char[] str,int n)                          //加密算法
{
    int i,len;
    char[] miwen;

    len=str.length;
    if((miwen=new char[len+1])==null)                   //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }
    for(i=0;i<len;i++)                                  //移位替换
    {
        miwen[i]=(char)(str[i]+n);
    }
    miwen[len]='\0';
    return miwen;
}
```

这里，输入参数 str 为明文字符数组，输入参数 n 为指定的加密密钥。程序中严格遵循了前述算法，读者可以对照以加深理解。

2. 替换解密算法

替换解密算法的基本方法是这样的，首先给定一个密钥 n，这个密钥必须和加密时的密钥一致，对应密文中的每一个字符的 ASCII 码都向前移动 n 而得到相应的明文。

我们按照这个思想来编写相应的解密算法，代码示例如下：

```
char[] jiemi(char[] str,int n)                          //解密算法
{
    int i,len;
    char[] mingwen;

    len=str.length;
    if((mingwen=new char[len+1])==null)                 //申请内存
    {
        System.out.print("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }
    for(i=0;i<len;i++)                                  //移位替换
    {
        mingwen[i]=(char)(str[i]-n);
    }
    mingwen[len]='\0';
    return mingwen;
}
```

这里，输入参数 str 为密文字数组，输入参数 n 为指定的加密密钥。程序中严格遵循了前述算法，读者可以对照以加深理解。

11.3.2 替换加密解密算法实例

有了前述的替换加密算法和换位解密算法之后，我们便可以进行字符串的加密解密操作。这里，通过一个例子来演示加密解密的操作过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 11-2】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.Scanner;

public class P12_2
{
    static char[] jiami(char[] str,int n)                //加密算法
    {
        int i,len;
        char[] miwen;

        len=str.length;
        if((miwen=new char[len+1])==null)                //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        for(i=0;i<len;i++)                               //移位替换
        {
            miwen[i]=(char)(str[i]+n);
        }
        miwen[len]='\0';
        return miwen;
    }

    static char[] jiemi(char[] str,int n)                //解密算法
    {
        int i,len;
        char[] mingwen;

        len=str.length;
        if((mingwen=new char[len+1])==null)              //申请内存
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        for(i=0;i<len;i++)                               //移位替换
        {
            mingwen[i]=(char)(str[i]-n);
        }
        mingwen[len]='\0';
        return mingwen;
    }

    public static void main(String[] args) throws IOException
    {
        int i,n;
        char[] srcstr=new char[100];
        char[] miwen;
```

```
        String go;

        System.out.print("替换加密解密算法演示！\n");

        do{
        System.out.print("\n 请先输入替换加密解密算法中的密钥：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        n=input.nextInt();                          //密钥
        System.out.print("请输入明文字符串：");

        BufferedReader bufferedReader = new BufferedReader(new InputStreamReader (System.in));
        String str=bufferedReader.readLine();
        srcstr=str.toCharArray();                   //明文字符串

        System.out.print("输入的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
            System.out.print(srcstr[i]);
        }

        miwen=jiami(srcstr,n);                      //加密
        System.out.print("\n 加密后的密文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
             System.out.print(miwen[i]);
        }
        miwen=jiemi(miwen,n);                       //解密
        System.out.print("\n 解密出的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
            System.out.print(miwen[i]);
        }

        System.out.print("\n 继续执行(y/n)?");
        go=input.next();
        }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
        System.out.println("演示结束！");
    }
}
```

在主方法中，首先由用户输入密钥。然后，由用户输入明文字符串。接着，程序开始调用加密算法和解密算法演示加密和解密的过程。程序中输出了密文字符串以及解密出的明文字符串。

执行该程序，得到如下结果，如图 11-6 所示。

图 11-6　执行结果

11.4　位加密解密算法

位加密算法是将明文信息转化为二进制数据，然后对这些二进制位进行加密便得到密文。位加密算法依托于计算机的强大位处理能力，在实际应用中非常流行。现代密码学中的很多加密解密算法方案都是依赖于位加密解密思路的，例如非常流行的序列密码方案。

11.4.1　位加密解密算法

在 Java 语言中，提供了 6 种位运算符，如表 11-1 所示。在密码学中，可以根据需要来选择合适的位运算符进行加密解密。一般来说，使用异或运算要比较方便些，我们先来了解一下异或运算符的运算规则。

表 11-1　C 语言的位运算符

位　运　算	名　　称
&	按位与（AND）
|	按位或（OR）
^	按位异或（XOR）
~	取反（NOT）
<<	左移
>>	右移

按位异或运算符是将两个操作数按二进制展开，对应位进行逻辑异或的运算符。按位异或运算符“^”是二目运算符。如果对应的二进制位均为 0 或均为 1，则逻辑或的结果为 0；只要对应位不同，则逻辑或的结果为 1。异或的真值表，如表 11-2 所示。

表 11-2　异或的真值表

A	B	A^B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例如将 a=100 和 b=6 进行按位或运算。100 的二进制表示为 01100100，6 的二进制表示为 00000110。结果 a^b=98（01100010）。

使用异或运算符进行加密解密的一个好处便是，在二进制运算中，如果将一个明文的二进制位与密钥进行按位“异或”运算，将得到密文；将此密文与密钥再次进行按位“异或”运算，又可得到明文。这样，我们只需编写一个函数便可以同时完成加密和解密两种运算。

我们可以根据这个思路来编写相应的位加密解密算法，代码示例如下：

```
char[] bitcode(char[] str,char n)                    //位加密解密算法
{
    int i,len;
    char[] wen;
    len=str.length;
```

```
        if((wen=new char[len+1])==null)
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        for(i=0;i<len;i++)
        {
            wen[i]=(char)(str[i]^n);                        //异或运算
        }
        wen[len]='\0';
        return wen;
    }
```

这里，输入参数 str 为明文字符数组，输入参数 n 为指定的加密密钥。程序中严格遵循了前述算法，读者可以对照以加深理解。

11.4.2 位加密解密算法实例

有了前述的位加密算法和换位解密算法之后，我们便可以进行字符串的加密解密操作。这里，通过一个例子来演示加密解密的操作过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 11-3】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.Scanner;

public class P12_3
{
    static char[] bitcode(char[] str,char n)                //位加密解密算法
    {
        int i,len;
        char[] wen;

        len=str.length;
        if((wen=new char[len+1])==null)
        {
            System.out.print("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        for(i=0;i<len;i++)
        {
            wen[i]=(char)(str[i]^n);                        //异或运算
        }
        wen[len]='\0';
        return wen;
    }
    public static void main(String[] args) throws IOException
{
        int i;
        char ch;
        char[] srcstr=new char[100];
        char[] miwen;
        String go;
```

```
        System.out.print("位加密解密算法演示！ \n");
        do{
        System.out.print("\n 请先输入替换加密解密算法中的密钥：");
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        ch=input.next().charAt(0);                          //密钥
        System.out.print("请输入明文字符串：");

        BufferedReader bufferedReader = new BufferedReader(new InputStreamReader (System.in));
        String str=bufferedReader.readLine();
        srcstr=str.toCharArray();                           //明文字符串

        System.out.print("输入的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
              System.out.print(srcstr[i]);
        }

        miwen=bitcode(srcstr,ch);                           //加密
        System.out.print("\n 加密后的密文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
              System.out.print(miwen[i]);
        }
        miwen=bitcode(miwen,ch);                            //解密
        System.out.print("\n 解密出的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
        {
              System.out.print(miwen[i]);
        }

        System.out.print("\n 继续执行(y/n)?");
        go=input.next();
        }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
        System.out.println("演示结束！");
    }
}
```

在主方法中，首先由用户输入密钥。然后，输入明文字符串。接着，程序开始调用加密算法和解密算法演示加密和解密的过程，这里加密算法和解密算法都是由 bitcode()方法来实现的。程序中输出了密文字符串以及解密出的明文字符串。

执行该程序，得到如下结果，如图 11-7 所示。

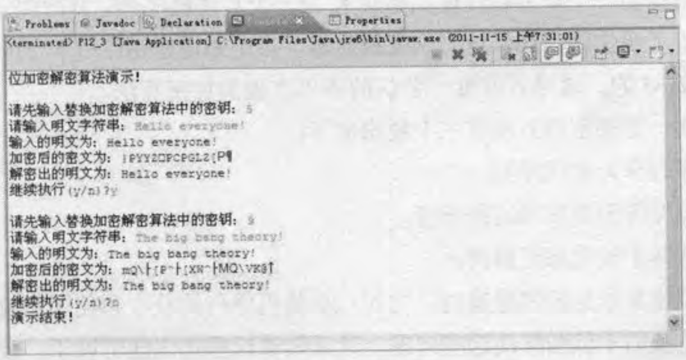


图 11-7　执行结果

11.5 一次一密加密解密算法

经典的密码体系是不能够严格保证安全的，简单地说，其大都依靠复杂的算法使得破译比较困难。但是随着计算机技术的飞速发展，一些看似不可破译的算法正在被逐个攻破。例如在 1977 年，破解一个 129 位的公钥密码需要 4×10^{16} 年才能完成，而到了 1994 年，在网络上通过分布式计算机只要 8 个月就可以成功破解了。另外，不同的加密算法总有不同的漏洞。攻击者还可以采用相应的漏洞来实现破译。

那么有没有一种绝对安全的密码方案呢？

11.5.1 一次一密加密解密算法

我们先来分析一下整个加密解密系统。这里假定 E_{AB} 是发送方 A 向接收方 B 发送密文时所采用的加密算法，而 D_{AB} 则是 E_{AB} 的逆运算，也就是解密算法。K 为密钥，M 为发送方的明文，C 为接收方收到的密文。那么，对一个密码系统的基本要求如下：

- 已知密钥 K 的情况下，E_{AB} 是容易计算的。
- 已知密钥 K 的情况下，D_{AB} 是容易计算的。
- 未知密钥 K 的情况下，由密文 C 不容易推导出明文 M。

这三条原则也比较好理解，相当于对合法的通信者加密和解密操作都是容易的，而对于非法的窃听者从截获的密文推导出明文是非常困难的。但是理论上的完全不可攻破的密码系统是很难的，目前只有一次一密系统（one-time system）才可以做到。

在一次一密系统中，假定明文是：

$$M=(m_0, m_1, \cdots\cdots, m_{n-1}),$$

密钥 K 为：

$$K=(k_0, k_1, \cdots\cdots, k_{n-1}),$$

一次一密的加密算法为：

$$C_i=E_{AB}(m_i, k_i),$$

这样得到的密文变为：

$$C=(c_0, c_1, \cdots\cdots, c_{n-1})$$

一次一密密码系统的一个重要特性便是密钥 K 为一个真随机序列，且密钥只使用一次。也就是说密钥序列的长度等于明文序列的长度。这就很显然，当不知道密钥序列 K 的时候，仅通过密文 C 是不可能推断出明文 M 的。这是目前唯一公认的不可攻破的加密算法。

总结一下，一次一密的密码系统有三个要求如下：

- 使用真随机序列作为密钥序列。
- 密钥序列的长度等于明文序列的长度。
- 加密解密算法基于按位加密解密。

其实，要做到上述几点是非常困难的。比如，真随机序列的获取和使用比较麻烦，密钥的安全分配很难实现。这里我们不试图解决这些问题，读者知道这些知识便可以了。我们将通过计算机的伪随机函数产生的随机序列作为密钥来简单演示一次一密的加密解密算法的执行过程。

我们可以根据这个思路来编写相应的一次一密加密解密算法，代码示例如下：

```
static char[] key=new char[MAX];                                    //用于保存密钥
static int len;
char[] bitcode(char[] str)                                          //一次一密加密算法
{
    int i;
    char[] wen;

    if((wen=new char[len+1])==null)
    {
        System.out.printf("申请内存失败!\n");
        System.exit(1);
    }
    for(i=0;i<len;i++)
    {
        wen[i]=(char)(str[i]^key[i]);                               //异或运算
    }
    wen[len]='\0';
    return wen;
}
```

这里，输入参数 str 为明文字符数组，数组 key 用于保存密钥。程序中使明文字符串和密钥序列中的每一个字符逐个进行按位异或操作，从而实现明文的加密。解密过程类似，读者可以自行分析。

11.5.2　一次一密加密解密算法实例

有了前述的一次一密加密算法和换位解密算法之后，我们便可以进行字符串的加密解密操作。这里，通过一个例子来演示加密解密的操作过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 11-4】

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.IOException;
import java.io.InputStreamReader;
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;

public class P12_4
{
    static int MAX=100;
    static char[] key=new char[MAX];                                //用于保存密钥
    static int len;
    static char[] bitcode(char[] str)                               //一次一密加密算法
    {
        int i;
        char[] wen;

        if((wen=new char[len+1])==null)
        {
            System.out.printf("申请内存失败!\n");
            System.exit(1);
        }
        for(i=0;i<len;i++)
        {
```

```
            wen[i]=(char)(str[i]^key[i]);                                //异或运算
        }
        wen[len]='\0';
        return wen;
    }

    public static void main(String[] args) throws IOException
{
        int i;
        char[] srcstr=new char[MAX];
        char[] miwen,mingwen;
        String go;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.printf("一次一密加密解密算法演示！\n");

        do{
        System.out.printf("请输入明文字符串：");

        BufferedReader bufferedReader = new BufferedReader(new InputStreamReader (System.in));
        String str=bufferedReader.readLine();

        srcstr=str.toCharArray();

        Random r=new Random();                                           //随机种子
        len=srcstr.length;
        for(i=0;i<len;i++)
        {
            key[i]=(char)(r.nextInt(10)+'0');                            //产生密钥序列
        }
        System.out.printf("此次加密解密演示的密钥序列为：");
        for(i=0;i<len;i++)
        {
            System.out.printf("%c",key[i]);
        }

        miwen=bitcode(srcstr);                                           //加密
        System.out.printf("\n 输入的明文为：");
        for(i=0;i<srcstr.length;i++)
            System.out.print(srcstr[i]);
        System.out.printf("\n 加密后的密文为：");
        for(i=0;i<miwen.length;i++)
            System.out.print(miwen[i]);
        mingwen=bitcode(miwen);                                          //解密
        System.out.printf("\n 解密出的明文为：");
        for(i=0;i<mingwen.length;i++)
            System.out.print(mingwen[i]);

        System.out.print("\n\n 继续执行(y/n)?");

        go=input.next();
        }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
        System.out.println("演示结束！");
    }
}
```

在主方法中，首先由用户输入明文字符串。然后，程序内部使用伪随机数产生相同长度的密钥 key。接着，程序开始调用加密算法和解密算法演示一次一密的加密和解密的过程，这里加密算法和解密算法都是由 bitcode()方法来实现的。程序中输出了密钥序列、密文字符串以及解密出的明文字符串。

执行该程序，得到如下结果，如图 11-8 所示。

图 11-8　执行结果

11.6　小　　结

密码学是现代社会十分重要的学科，其也是计算机算法的一个重要练兵场。通过各种各样的算法策略，可以实现多种加密方案。本章介绍了密码学的基本知识，同时重点分析了换位密码算法、替换密码算法、位密码算法和一次一密的密码算法。通过这些例子，读者可以领略到算法在密码学中的应用。

第 12 章　压缩与解压缩算法

压缩与解压缩软件是我们日常使用非常普遍的软件。通过压缩，可以减小文件的体积，这样硬盘上便可以存储更多的文件，同时也可以节省网络传输的时间。对于压缩后的文件，通过解压缩便可以恢复出原文件。最常用的压缩与解压缩软件包括 WinRAR、7-ZIP 等。其实，压缩与解压缩软件并不神秘。本章将介绍压缩与解压缩算法的实现。

12.1　压缩与解压缩概述

压缩与解压缩的过程其实就是数据编码的转换。从更深刻的信息论角度分析，一个文件就是一段信息，这个信息有序度的度量便是信息熵。理论上证明，一个文件可以通过某种编码转换使其信息熵趋于最大而文件体积减小。这个过程是无损的，通过逆运算便可以无损地恢复出原文件。更为详细的介绍，读者可以参阅信息论的相关知识。这里仅简单介绍压缩与解压缩相关的基本概念和算法。

12.1.1　压缩与解压缩分类

我们知道，压缩与解压缩的过程其实就是数据编码的转换，这就需要指定一个编码转换的映射。如果这个映射规则固定，那么就称为静态压缩算法，否则称为动态压缩算法。其实，与我们直接相关的是有损压缩和无损压缩的概念。

- 有损压缩：压缩后的信息与原始信息不同，往往是丢失了部分信息。这样，通过牺牲一定的数据量来达到数据压缩的目的。例如，照相机拍摄照片的原始格式往往是 raw 格式的，其占用了大量的存储空间，通过算法将其转换为 jpg 格式图片，这个过程便是有损压缩。另一个例子便是视频的压缩。这些压缩往往不影响信息的主要内容，仅是舍弃了部分不相干的内容。
- 无损压缩：压缩后的信息与原始信息相同，往往可以通过解压缩恢复出原文件。例如，常用的压缩软件 WinRAR、7-ZIP 等都是执行的无损压缩过程。这是显而易见的，否则我们将无法恢复出压缩前的文件。

12.1.2　典型的压缩解压缩算法

目前来说，有很多种压缩解压缩算法。我们这里主要介绍几种无损压缩算法：

- RLE 算法：通过将一组连续的相同数据转换为数据加重复字节的方式来实现数据压缩的目的。
- 哈夫曼无损压缩算法：采用哈夫曼编码，使用了信息熵的理论，使转换后的信息熵增大，同时文件的体积将减小，以达到数据压缩的目的。
- LZW 算法：采用的串表压缩的思想，这是现在用得比较多的一种压缩算法。

由于篇幅限制，本章将主要介绍 LZW 压缩算法的原理和实现。

12.2 压缩算法

LZW 压缩算法基于串表压缩，LZW 压缩算法的执行过程如下：

（1）从原文件中读入不同的字节。

（2）根据这些字节创建一个字符串编译字典。

（3）使用字符串编译字典中的字符索引来替代原文件中的相应字符，从而达到压缩的目的。

这里需要注意的是，LZW 使用的是扩充的 ASCII 编码，其采用 12 位二进制来表示字符串编译字典中的一个代码。这样，12 位二进制数最多可表示 4096 种字符串编码，LZW 压缩算法对每一种字符串编码的定义如下：

- 代码 0~255 表示一个字节数据。
- 代码 256 和 256 保留，不使用。
- 代码 258~4096 表示创建的字符串编译表中的编码。

虽然这里使用到了字符串编译字典，但是我们并不需要保存这个字符串编译字典，而在解压缩过程中可以自动创建出相同的字符串编译字典。另外，这个字符串编译表随着输入文件的不同而不同。

我们可以根据上述思路来编写相应的 LZW 压缩算法，代码示例如下：

```
void code(BufferedInputStream in,BufferedOutputStream out)
{
        System.out.println("coding...\n"+ "......\n");
        byte a[]=new byte[1],buf[]=new byte[3];

        String prefix="",cur="";
        byte i=0;
        short indexbuf[]=new short[2];

        String str=null;
    try{
            short m=0;
            while(  (a[0]=(byte)in.read() )   != -1 )
            {
                cur=new String(a);
                count1++;
                str=prefix;
                str=str.concat(cur);
                m=(short)dic.indexOf(str);

                if( m!=-1)
                {
```

```
                    prefix=str;
                }
                else
                {
                    if(i==0)
                    {
                        indexbuf[0]=(short)dic.indexOf(prefix);
                        i=1;
                    }
                else
                {
                    indexbuf[1]=(short)dic.indexOf(prefix);
                    zipOutput(out,indexbuf);

                    count2+=3;
                    i=0;
                }

                dic.add(str);
                prefix=cur;

            }
        }
        if(i==(byte)1)
        {
            indexbuf[1]=END;
            zipOutput(out,indexbuf);
            count2+=3;

        }

        dic.add(str);
        in.close ();
        out.close ();

    System.out.println("zip rate:"+(float)count2*100/count1+"% ");
        }catch(IOException e )
    {
        System.err.println(e);
        return;
    }
        catch(OutDictionaryException e)
        {
            System.err.println(e);
        return;
        }
}

void zipOutput(BufferedOutputStream out,short index[])
{
try
{
        byte buf[]=new byte[3];
          buf[1]=(byte)(index[0]<<4);
          buf[0]=(byte)(index[0]>>4);
```

```
            buf[2]=(byte)index[1];
            buf[1]+=(byte)(index[1]>>8);

            out.write(buf,0,3);

    }catch( IOException e )
    {
        System.err.println(e);
        return;
    }
    }

class Dictionary
{
    ArrayList ar=new ArrayList();

    public Dictionary()
    {
        char c[]=new char[1];
        for( c[0]=0;c[0]<128;c[0]++)
        {
            ar.add(new String(c));
        }
    }

    public int indexOf(String a)
    {
        return ar.indexOf(a);
    }

    public void add (String a) throws OutDictionaryException
    {
        if( length()<4096)
            ar.add(a);
        else
        {
            throw(new OutDictionaryException());
        }
    }

    public int length()
    {
        return (short)ar.size();
    }

    public String toString()
    {
        Integer le=new Integer(length() );
        String str="size of the dictionary: "+le.toString ()+"\n";
        for(int i=0;i<length();i++)
            str+=new String(i+": "+(String)ar.get(i)+"\t");
        return str;
    }

    public String getString(short i)
```

```
        {
            return (String)ar.get(i);
        }
}
```

这里，code()方法便是 LZW 压缩算法，其中，输入参数 in 为待压缩的输入文件流，输入参数 out 为压缩后的输出文件流。数据压缩方法严格遵循了前述的 LZW 压缩算法的执行过程，读者可以对照以加深理解。

Dictionary 结构是 LZW 压缩算法中需要用到的，用动态数组实现，能够容纳 2^{12} 个词条，开始的时候初始化，提供查找词条，增加词条，取得词条个数等方法。每读入一个字节作为后缀，判断这个词字典中是否存在，存在则直接输出，不存在则加入字典中。

压缩方法 code()中还使用到了 zipOutput()方法，用于输出压缩后的内容。其中，输入参数 out 为压缩后的输出文件，输入参数 index 为字典的索引编号。

12.3 解压缩算法

LZW 解压缩算法同样基于串表压缩，LZW 解压缩算法的执行过程如下：

（1）从原文件中读入字符。

（2）根据这些字符在字符串编译字典中查找。

（3）如果读入的是编码，则将对应的字符串输出，从而恢复出压缩前的原文件。

LZW 解压缩算法能够从压缩后的文件创建一个字符串编译字典，而且这个字符串编译表与压缩算法中的是一致的。

我们可以根据上述思路来编写相应的 LZW 解压缩算法，代码示例如下：

```
void decode(BufferedInputStream in,BufferedOutputStream out)
{
        System.out.println("decoding...\n"+".......\n");

        short precode=0,curcode=0;
        String prefix=null;
        short i=0;
        short bufcode[]=new short[2];
        boolean more=true;
        try{

            more=zipInput(in,bufcode);
            if(more)
            {
                curcode=bufcode[0];
                stringOut(out,dic.getString(curcode) );
            }
            else
                System.out.println("error in the beginning...");

            while(more)
            {
                precode=curcode;
                if(i==0)
```

```
                {
                    curcode=bufcode[1];
                    i=1;
                }
                else
                {
                    more=zipInput(in,bufcode);
                    curcode=bufcode[0];
                    if(bufcode[1]==END)
                    {
                        stringOut(out,dic.getString (bufcode[0] ));
                        break;
                    }
                    i=0;
                }

                if(curcode<dic.length())
                {
                    stringOut(out,dic.getString(curcode) );
                    prefix=dic.getString(precode);

                    prefix+=(dic.getString(curcode)).substring(0,1);
                    dic.add(prefix);
                }
                else
                {
                    prefix=dic.getString(precode);
                    prefix+=prefix.substring(0,1);
                    stringOut(out,prefix );
                    dic.add(prefix);


                }
            }

            in.close ();
            out.close ();
            System.out.println("decode finished!");

            }catch( OutDictionaryException e )
            {
                System.err.println(e);
                return;
            }
            catch(IOException e)
            {
        System.err.println(e);
            return;
    }

}
boolean   zipInput(BufferedInputStream in,short codebuf[])
{
    byte buf[]=new byte[3],temp;
    short le=(short)dic.length();
```

```
        try{
                        if(in.read(buf,0,3)!=3)
                        {
                            System.out.println("the end of the file!");
                            return false;
                        }
                        codebuf[0]=toRight(buf[0],4);
                        codebuf[0]+=(short)(toRight(buf[1],0)>>4);

                        codebuf[1]=toRight(buf[2],0);
                        temp=(byte)(toRight(buf[1],4));
                        codebuf[1]+=toRight(temp,4);

                        if(codebuf[0]<-1 ||codebuf[1]<-1)
                        {
                            System.out.println("erroring while getting the code :"+codebuf[0] +"\t"+codebuf[1]);
                            System.out.println(dic);
                            return false;
                        }

        }
        catch(IOException e )
          {
                System.err.println(e);
                return false;
          }
    return true;
  }
```

这里，decode()方法便是 LZW 解压缩算法，其中，输入参数 in 为待压缩的输入文件流，输入参数 out 为压缩后的输出文件流。数据压缩方法严格遵循了前述的 LZW 压缩算法的执行过程，读者可以对照以加深理解。

Dictionary 结构是 LZW 压缩算法中需要用到的，用动态数组实现，能够容纳 2^{12} 个词条，开始的时候初始化，提供查找词条，增加词条，取得词条个数等方法。每读出一个字节作为前缀，判断这个词字典中是否存在，存在则替换输出，不存在直接输出。

解压缩方法 decode()中还使用到了 zipInput()方法，用于从压缩文件中读取数据。其中，输入参数 in 为输入的待解压缩文件。其中，输入参数 codebuf 为字典的索引编号。

12.4 压缩解压缩实例

有了前述的 LZW 压缩和解压缩算法之后，我们便可以进行文件的压缩和解压缩操作。这里，通过一个例子来演示压缩和解压缩的操作过程。完整的程序代码示例如下：

【程序 12-1】

```
import java.io.*;
import java.util.ArrayList;
import java.util.Scanner;

public class P13_1
{
```

```
Dictionary dic=new Dictionary();
    int count1=0,count2=0;
    BufferedInputStream in;
    BufferedOutputStream out;
    final short END=4095;

    public static void main(String []args)
{
        String[] args1={"-c","s1.txt","s1.mz"};
        String[] args2={"-d","s1.mz","t2.txt"};
        String[] args3;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.println("压缩解压缩算法演示！");
        String go;
        do{
        System.out.print("请输入功能（0：压缩，1：解压缩）：");
        int s=input.nextInt();
        if(s==0){
             args3=args1;

        }else{
             args3=args2;
        }

        P13_1 a=new P13_1(args3);
     a.run(args3);
     System.out.println("继续执行(y/n):");
     go=input.next();
        }while(go.equalsIgnoreCase("y"));
        System.out.println("演示结束！");
     return ;
}

public P13_1(String []args)
{
    try{
            String f=new String();
            in =new BufferedInputStream(new FileInputStream(new File(args[1])));
            if(args.length==3 && !args[2].equals(new String("-dic")))
              {
                f=args[2];
              }
              else
              {
                int i=args[1].lastIndexOf(new String(".") );
                f=args[1].substring(0,i)+((args[0].equals("-c"))?".lzw":".dlzw");
              }
             out=new BufferedOutputStream(new FileOutputStream(new File(f)));
      }
        catch(FileNotFoundException e )
            {
             System.err.println(e);
                 return;
            }
         catch(IOException e )
```

```
            {
                System.err.println(e);
                    return;
            }
    }

    public void run(String args[] )
    {
    if(args[0].equals(new String("-c"))     )
          {
            code(in,out);
            }
            else
            {
            decode(in,out);
            }
    if(args[args.length-1].equals(new String("-dic") ))
        System.out.println(dic.toString ());
    }


    public void code(BufferedInputStream in,BufferedOutputStream out)
    {
        System.out.println("coding...\n"+ "......\n");
        byte a[]=new byte[1],buf[]=new byte[3];

        String prefix="",cur="";
        byte i=0;
        short indexbuf[]=new short[2];

        String str=null;
        try{
            short m=0;
            while(   (a[0]=(byte)in.read() )   != -1 )
            {
                cur=new String(a);
                count1++;
                str=prefix;
                str=str.concat(cur);
                m=(short)dic.indexOf(str);

                if( m!=-1)
                {
                    prefix=str;
                }
                Else
                {
                    if(i==0)
                    {
                        indexbuf[0]=(short)dic.indexOf(prefix);
                        i=1;
                    }
                    Else
                    {
                        indexbuf[1]=(short)dic.indexOf(prefix);
```

```
                    zipOutput(out,indexbuf);

                    count2+=3;
                    i=0;
                }

                dic.add(str);
                prefix=cur;

            }
        }
        if(i==(byte)1)
        {
            indexbuf[1]=END;
            zipOutput(out,indexbuf);
            count2+=3;

        }

        dic.add(str);
        in.close ();
        out.close ();


        System.out.println("zip rate:"+(float)count2*100/count1+"% ");
        }catch(IOException e )
        {
            System.err.println(e);
                return;
        }
        catch(OutDictionaryException e)
        {
            System.err.println(e);
            return;
        }


}

public void decode(BufferedInputStream in,BufferedOutputStream out)
{
    System.out.println("decoding...\n"+".......\n");

    short precode=0,curcode=0;
    String prefix=null;
    short i=0;
    short bufcode[]=new short[2];
    boolean more=true;
    try{

        more=zipInput(in,bufcode);
        if(more)
        {
            curcode=bufcode[0];
            stringOut(out,dic.getString(curcode) );
```

```
}
else
    System.out.println("error in the beginning...");

while(more)
{
    precode=curcode;
    if(i==0)
    {
        curcode=bufcode[1];
        i=1;
    }
    else
    {
        more=zipInput(in,bufcode);
        curcode=bufcode[0];
        if(bufcode[1]==END)
        {
            stringOut(out,dic.getString (bufcode[0] ));
            break;
        }
        i=0;
    }

    if(curcode<dic.length())
    {
        stringOut(out,dic.getString(curcode) );
        prefix=dic.getString(precode);

        prefix+=(dic.getString(curcode)).substring(0,1);
        dic.add(prefix);
    }
    else
    {
        prefix=dic.getString(precode);
        prefix+=prefix.substring(0,1);
        stringOut(out,prefix );
        dic.add(prefix);


    }
}

in.close ();
out.close ();
System.out.println("decode finished!");

}catch( OutDictionaryException e )
{
    System.err.println(e);
    return;
}
catch(IOException e)
{
    System.err.println(e);
```

```
                    return;
                }

    }
private void zipOutput(BufferedOutputStream out,short index[])
{
   try
   {
        byte buf[]=new byte[3];
           buf[1]=(byte)(index[0]<<4);
             buf[0]=(byte)(index[0]>>4);
             buf[2]=(byte)index[1];
        buf[1]+=(byte)(index[1]>>8);

        out.write(buf,0,3);

   }catch( IOException e )
        {
              System.err.println(e);
                        return;
        }
}

private   boolean   zipInput(BufferedInputStream in,short codebuf[])
{
     byte buf[]=new byte[3],temp;
     short le=(short)dic.length();
     try{
                 if(in.read(buf,0,3)!=3)
                 {
                       System.out.println("the end of the file!");
                       return false;
                 }
                 codebuf[0]=toRight(buf[0],4);
                 codebuf[0]+=(short)(toRight(buf[1],0)>>4);

                 codebuf[1]=toRight(buf[2],0);
                 temp=(byte)(toRight(buf[1],4));
                 codebuf[1]+=toRight(temp,4);

                 if(codebuf[0]<-1 ||codebuf[1]<-1)
                 {
                       System.out.println("erroring while getting the code :"+codebuf[0] +"\t"+codebuf[1]);
                       System.out.println(dic);
                       return false;
                 }

      }
      catch(IOException e )
        {
              System.err.println(e);
              return false;
        }
  return true;
}
```

```
    private short toRight(byte buf,int n)
    {
      short s=0;
      for(short i=7;i>=0;i--)
      {
          if( ( (1L<<i)&buf )!=0 )
            s+=(short)(1L<<(i+n));
      }
      return s;
    }

    private    void stringOut(BufferedOutputStream out,String str)
    {
        byte a[]=str.getBytes();
        try{
        out.write(a,0,str.length());
      }
      catch(IOException e )
          {
                System.err.println(e);

          }

    }
}

class OutDictionaryException extends Exception
{
      public    String toString()
      {
          return (super.toString ()+"out of the dictionary size!!");
      }
}

class Dictionary
{
      ArrayList ar=new ArrayList();

      public Dictionary()
      {
      char c[]=new char[1];
      for( c[0]=0;c[0]<128;c[0]++)
      {
                  ar.add(new String(c));
              }
}

      public int indexOf(String a)
      {
          return ar.indexOf(a);
      }

      public void add (String a) throws OutDictionaryException
      {
```

```
        if( length()<4096)
            ar.add(a);
        else
        {
            throw(new OutDictionaryException());
        }
    }
    public int length()
    {
        return (short)ar.size();
    }

    public String toString()
    {
        Integer le=new Integer(length() );
        String str="size of the dictionary: "+le.toString ()+"\n";
        for(int i=0;i<length();i++)
            str+=new String(i+": "+(String)ar.get(i)+"\t");
        return str;
    }

    public String getString(short i)
    {
        return (String)ar.get(i);
    }

}
```

在主方法中，首先由用户输入操作类型，0 代表进行压缩，1 代表进行解压缩。然后，程序分别调用相应的方法来进行压缩和解压缩操作。程序中输出了压缩进度。

这里，压缩操作演示的是将文件 s1.txt 压缩为 s1.mz。而解压缩操作演示的将 s1.mz 恢复为 t2.txt。读者可以找任意一个文件来测试，如果经过压缩后的文件能够恢复出原文件，那么便表示该压缩和解压缩算法成功了。

执行该程序，得到如下结果，如图 12-1 所示。

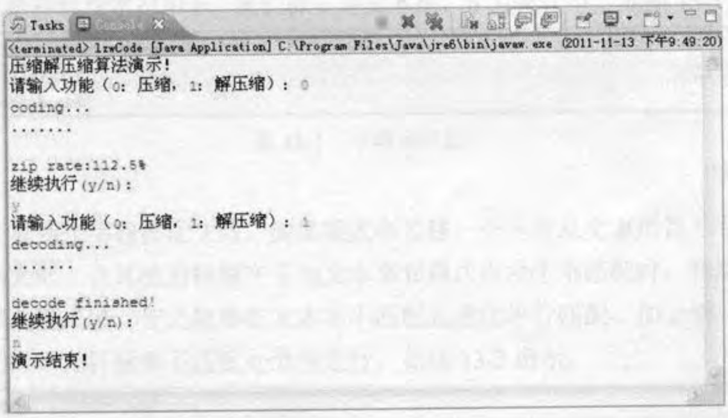


图 12-1 执行结果

12.5 小　　结

压缩与解压缩算法有很多种，本章介绍了其中比较常用的一种 LZW 压缩与解压缩算法。LZW 压缩算法基于先进的串表压缩，代码实现比较简单。本章给出了完整的 LZW 压缩与解压缩算法，并通过一个完整的实例演示了 LZW 算法压缩与解压缩的过程。有兴趣的读者可以进一步参阅信息及其他数据压缩的书籍。

第 13 章　算法面试题

在算法面试中，主要的面试内容分为基础算法和思维扩展算法两部分。基础算法主要考查面试者的基础是否牢固；思维扩展算法主要考查面试者分析、解决问题和临场反应等方面的能力。

基础算法都是比较常见的算法，描述规范、熟练程度非常重要，只要能够按照要求实现就可以，思维扩展算法首先需要面试者建立编程模型，然后使用代码编程并给出答案。本章分析了经常出现的算法，希望能够给读者带来帮助和启示。

13.1 基础算法

基础算法是算法的基本功，一定要熟练掌握，主要包括：字符串匹配、分解质因数、数字排列、数字组合等。

13.1.1 字符串匹配

考题题干：

判断字符串 a 是否包含字符串 b。我们称 a 为文本串，b 为模式串，如图 13-1 所示。

```
a = bcabcabcabbcabcabcabcabd
    ||||||||||/
b = bcabcabcabc
```

图 13-1　字符串匹配

考题分析：

如上图中“/”处两个字符匹配失败，如果模式串右移一个字符从文本串第二个字符开始重新进行匹配，显然效率太低。该算法的精髓在于当文本串和模式串发生不匹配时，利用模式串自身的特点，尽可能多的移动模式串，使之能够在文本串不匹配处继续进行匹配。如上例，发生不匹配时，模式串可以右移三次，在目标串不匹配处继续进行，如图 13-2 所示。

```
a=bcabcabcabbcabcabcabcabd
     |||||||/
b=   bcabcabcabc
```

图 13-2　字符串匹配

模式串 b=b1b2b3b4…bn，如果有 b1b2b3b4…bk-1 等于 bj-(k-1)bj-(k-2)bj-(k-3)…bj-1，那么在进行匹配时，如果在 j 处与文本串 i 处匹配失败，我们可以将模式串右移 j-k 个字符，即直接将文本串 i 处字符与 bk 进行匹配。由于 b1b2b3b4…bk-1 等于 bj-(k-1)bj-(k-2)bj-(k-3)…bj-1，显然模式串前 k-1 位的字符是与文本串 i 处前 k-1 位字符是匹配的。

所以问题转化为求模式串各字符的 k 值，记作 K(j)，该值可以根据模式串自身求得。

参考代码：

```
import java.util.Scanner;

public class KMPAlgorithm
{

    /**
     * 判断是否匹配
     * @param target  目标文本串
     * @param mode  模式串
     * @return  匹配结果
     */
    public static boolean matchString(String target, String mode)
    {
        //为了和算法保持一致，使 index 从 1 开始，增加一个前缀
        String newTarget = "x" + target;
        String newMode = 'x' + mode;

        int[] K = calculateK(mode);

        int i = 1;
        int j = 1;

        while(i <= target.length() && j <= mode.length())
        {
            if (j == 0 || newTarget.charAt(i) == newMode.charAt(j))
            {
                i++;
                j++;
            }
            else
            {
                j = K[j];
            }
        }

        if (j > mode.length())
        {
            return true;
        }
        return false;
    }

    /*
     * 计算 K 值
     */
    private static int[] calculateK(String mode)
```

```
{
    //为了和算法保持一致，使 index 从 1 开始，增加一前缀
    String newMode = "x" + mode;
    int[] K = new int[newMode.length()];
    int i = 1;
    K[1] = 0;
    int j = 0;

    while(i < mode.length())
    {
        if (j == 0 || newMode.charAt(i) == newMode.charAt(j))
        {
            i++;
            j++;
            K[i] = j;
        }
        else
        {
            j = K[j];
        }
    }

    return K;
}

    /**
     * @param args
     */
    public static void main(String[] args)
    {
        String s1,s2;
        boolean b;
       Scanner input=new Scanner(System.in);

       System.out.println("请输入字符串 1：");
       s1=input.next();
       System.out.println("请输入字符串 2：");
       s2=input.next();

       b=KMPAlgorithm.matchString(s1, s2);

       System.out.println("匹配成功？"+b);

}

}
```

运行结果，运行程序，结果如图 13-3 所示。

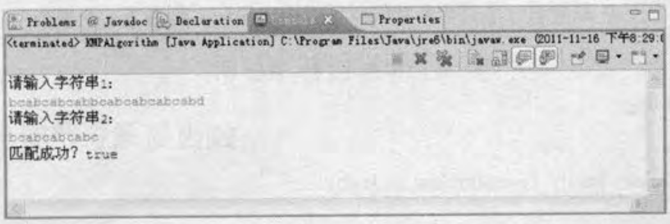


图 13-3 程序输出结果

13.1.2 哥德巴赫猜想的近似证明

考题题干：

哥德巴赫猜想是说任何一个大于 2 的偶数都能表示为两个素数之和。编写一个 Java 程序，验证 1～200 内哥德巴赫猜想的正确性，也就是近似证明哥德巴赫猜想。

考题分析：

可以应用枚举的方法列出 1～200 内的所有偶数。然后逐一验证每个偶数是否满足哥德巴赫猜想的论证。如果有一个不符合，就意味着哥德巴赫猜想不成立。

一个正偶数 m 可以表示成 m=1+(m-1)，m=2+(m-2)，m=3+(m-3)，……，m=m/2+m/2。由于 m/2 的后半部分和前半部分的结果是一样的，只是加数顺序不同，所以可以忽略。

参考代码：

```
public class Guess
{
    public static boolean isPrime(int i)
    {
        // 判断参数 i 是否是素数，是则返回 true 反之则返回 false
        int n;
        boolean flag = true;
        if (1 == i)                          //1 本身不是素数，因此需把这个特殊的数字抛出
            flag = false;

        for (n = 2; n <= i - 1; n++)    /* 判断 i 是否是素数的一个方法是看 2~i-1 之间有其因子（能被 2 整
除），有则不是素数返回 false，反之则返回 true*/
            if (i % n == 0)
            {
                flag = false;
                break;
            }
        return flag;
    }
    public static boolean isGoldbach(int a)
    {   // 判断参数 a 是否符合哥德巴赫猜想
        int i;
        boolean flag = false;
        for (i = 1; i <= a / 2; i++)
        {
            if (isPrime(i) && isPrime(a - i))
            {   // 根据试题分析中的表达式，传入相关的两个参数
                flag = true;
                System.out.printf("%3d=%3d+%3d  ",a,i,(a - i));
                break;
                 // 只要有一个符合条件的就可以退出循环，判断下一个偶数
            }
        }
        return flag;
    }
    public static boolean Testify_Guess(int low, int high)
    {
        // 判断 1～100 范围内的所有偶数是否符合哥德巴赫猜想，符合则返回 true，反之则返回 false
```

```
            int i, j = 0;
            boolean flag = true;
            for (i = low; i <= high; i++)
                if (i % 2 == 0 && i > 2)          //在 1～200 之间选取大于 2 的偶数进行猜想测试
                    if (isGoldbach(i))
                    {
                        j++;                      //j 用来控制输出格式 ，每行输出 5 个数据
                        if (j == 10)
                        {
                            System.out.println();
                            j = 0;
                        }
                    }
                    else
                    {
                        flag = false;
                        break;
                    }
            return flag;
        }
    public static void main(String[] args)
    {
        System.out.println("\n 在 1~200 范围内，现在开始证实哥德巴赫猜想：");
        if (Testify_Guess(1, 200))
        {
            System.out.println("\n 在 1~200 范围内，哥德巴赫猜想是正确的。");
        }
        else
        {
            System.out.println("\n 哥德巴赫猜想是错误的");
        }
    }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-4 所示。

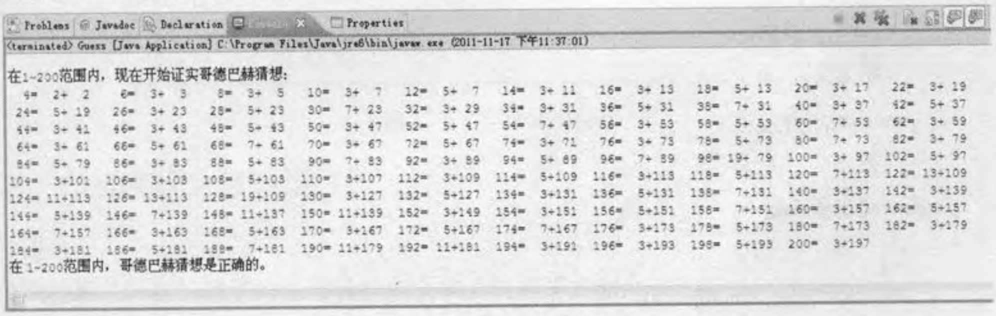


图 13-4　程序输出结果

13.1.3　将一个正整数分解质因数

考题题干：

例如：输入 90，打印出 90=2*3*3*5

考题分析：

对 n 进行分解质因数，应先找到一个最小的质数 k，然后按下述步骤完成：

（1）如果这个质数恰等于 n，则说明分解质因数的过程已经结束，打印出即可。

（2）如果 n <> k，但 n 能被 k 整除，则应打印出 k 的值，并用 n 除以 k 的商，作为新的正整数，重复执行第一步。

（3）如果 n 不能被 k 整除，则用 k+1 作为 k 的值，重复执行第一步。

参考代码：

```
import java.util.Scanner;

public class fenjie2
{
    int[] result=new int[100];
    int x=0;

    public static boolean isPrime(int n)
    {
        if(n==2)
              return true;
        for(int i=2;i<Math.sqrt(n);i++)
        {
            if(n%i==0)
                return false;
        }
        return true;
    }

    public static int[] minPrime(int n)
    {
        int[] pri=new int[100];
        int a=0;
        for(int i=2;i<=n;i++)
        {
            if(isPrime(i))
            {
                pri[a++]=i;
            }
        }
        return pri;
}

    public void dispose(int n)
    {
        int j;
        int[] min=fenjie2.minPrime(n);
        for(j=0;j<min.length;j++)
        {
            if(n%min[j]==0)
            {
                this.result[x++]=min[j];
                if(n==min[j]) return ;
                break;
```

```
            }
        }
        this.dispose(n/min[j]);
    }

    public static void main(String[] args) throws Exception
    {
        Scanner input=new Scanner(System.in);

        fenjie2 obj=new fenjie2();
        String s="";
        String go;

        System.out.println("请输入数字：");
        int num=input.nextInt();
        obj.dispose(num);
        for(int i=0;i<obj.result.length;i++)
        {
            if(obj.result[i]>0)
            {
                s +=obj.result[i]+"*";
            }

        }
        System.out.println(num+"="+s.substring(0,s.length()-1));

        System.out.println("结束！");

    }
}
```

输出结果：

运行程序，结果如图 13-5 所示 。

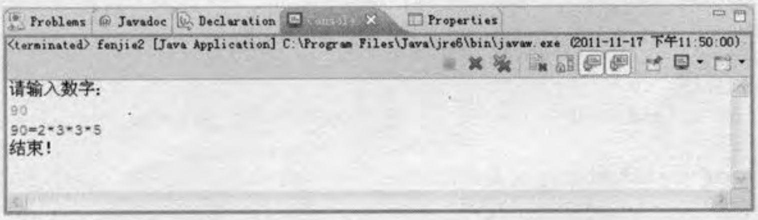


图 13-5 程序输出结果

13.1.4 怎样实现金额转换

考题题干：

金额转换，阿拉伯数字的金额转换成汉字大写的形式如：

（￥1011）→（壹仟零壹拾壹元整）输出。

考题分析：

金额转换，在开发财务相关软件时经常会用到，也是软件本地化的一个需要。一般开发公司或者团队都有相应的金额转换类或者是模块，配合报表工具，可以实现良好的本地化。这里给出一个简单的金额转换代码，供读者参考。

总体思路：对数字进行分级处理，级长为 4，对分级后的每级分别处理，处理后得到字符串相连，如：123456=12|3456，第二级：12=壹拾贰 + “万”，第一级：3456 =叁仟肆佰伍拾陆 + “”

参考代码：

```
import java.text.DecimalFormat;
import java.text.NumberFormat;
import java.util.Scanner;

public final class RMB
{
      private double amount = 0.0D;
      private static final String NUM = "零壹贰叁肆伍陆柒捌玖";
      private static final String UNIT = "仟佰拾个";
      private static final String GRADEUNIT = "仟万亿兆";
      private static final String DOTUNIT = "角分厘";
      private static final int GRADE = 4;
      private static final String SIGN = "￥";
      private static final NumberFormat nf = new DecimalFormat("#0.###");

      private RMB(double amount)
      {
          this.amount = amount;

      }

      public static String toBigAmt(double amount)
      {
           nf.setMinimumFractionDigits(3);       //小数点后不足的补零
           String amt = nf.format(amount);       //将 double 类型的数格式化并转换成字符串,实际上进行了四舍五入
           System.out.println(amt);
           Double d = new Double(amount);
           String dotPart = "";                  //取小数位
           String intPart = "";                  //取整数位

           int dotPos;
           if ((dotPos = amt.indexOf('.')) != -1)
           {
                intPart = amt.substring(0, dotPos);
                dotPart = amt.substring(dotPos + 1);

                if(dotPart.length()>4)
                { //超过 4 位直接截取
                     dotPart = dotPart.substring(0,4);
                }
           }
           else
           {
                intPart = amt;
           }

           if (intPart.length() > 16)
                throw new java.lang.InternalError("数额太大，无法转换。");

           String intBig = intToBig(intPart);
```

```
        String dotBig = dotToBig(dotPart);

        //以下代码稍做修改，现在好多了。

        if ((dotBig.length() == 0) && (intBig.length() != 0))
        {
            return intBig + "元整";
        }
        else if ((dotBig.length() == 0) && (intBig.length() == 0))
        {
            return intBig + "零元";
        }
        else if ((dotBig.length() != 0) && (intBig.length() != 0))
        {
            return intBig + "元" + dotBig;
        }
        else
        {
            return dotBig;
        }
    }

    /**

     * 用来处理几角几分几厘

     * @param dotPart

     * @return

     */

    private static String dotToBig(String dotPart)
    {
        //得到转换后的大写（小数部分）
        String strRet = "";
        for (int i = 0; i < dotPart.length() && i < 3; i++)
        {
            int num;
            if ((num = Integer.parseInt(dotPart.substring(i, i + 1))) != 0)
                strRet += NUM.substring(num, num + 1)
                        + DOTUNIT.substring(i, i + 1);
        }
        return strRet;
    }

    /**
     * 用来处理多少元 ，这个要仔细考虑才行
     * @param intPart
     * @return
     */
    private static String intToBig(String intPart)
    {
        //得到转换后的大写（整数部分）
        int grade;                                          //级长
```

```
        String result = "";
        String strTmp = "";
                //得到当前级长
        grade = intPart.length() / GRADE;

                //调整级次长度
        if (intPart.length() % GRADE != 0)
            grade += 1;
                //对每级数字处理，先处理最高级，然后再处理低级的
        for (int i = grade; i >= 1; i--)
        {
            strTmp = getNowGradeVal(intPart, i);            //取得当前级次数字
            result += getSubUnit(strTmp);                   //转换大写
            result = dropZero(result);                      //除零外去掉连续的零

                //加级次单位
            if (i > 1)                                      //末位不加单位
                //单位不能相连续
                //注意：连续 4 个零的时候要特殊处理(wmj 修改此 bug)
                if(getSubUnit(strTmp).equals("零零零零"))
                {
                    result = result+"零";
                }
                else
                {
                    result += GRADEUNIT.substring(i - 1, i);
                }

        }
        return result;
    }

private static String getNowGradeVal(String strVal, int grade)
    {
                //得到当前级次的串
        String rst;
        if (strVal.length() <= grade * GRADE)
            rst = strVal.substring(0, strVal.length() - (grade - 1) * GRADE);
        else
            rst = strVal.substring(strVal.length() - grade * GRADE, strVal
                    .length()
                    - (grade - 1) * GRADE);
        return rst;
    }

private static String getSubUnit(String strVal)
    {
                //数值转换
        String rst = "";

        for (int i = 0; i < strVal.length(); i++)
        {
            String s = strVal.substring(i, i + 1);
            int num = Integer.parseInt(s);
```

```
            if (num == 0)
            {
                //“零”作特殊处理
                if (i != strVal.length())                    //转换后数末位不能为零
                    rst += "零";
            }
            else
            {
                //If IntKey = 1 And i = 2 Then
                //“壹拾”作特殊处理
                //“壹拾”合理
                rst += NUM.substring(num, num + 1);
                //追加单位

                if (i != strVal.length() - 1)                //个位不加单位
                    rst += UNIT.substring(i + 4 - strVal.length(), i + 4

                            - strVal.length() + 1);
            }

        }
        return rst;
    }

    private static String dropZero(String strVal)
    {
        //去除连继的“零”
        String strRst;
        String strBefore;                                    //前一位置字符
        String strNow;                                       //现在位置字符

        strBefore = strVal.substring(0, 1);
        strRst = strBefore;

        for (int i = 1; i < strVal.length(); i++)
        {
            strNow = strVal.substring(i, i + 1);
            if (strNow.equals("零") && strBefore.equals("零"))
                ;//同时为零
            else
                strRst += strNow;
            strBefore = strNow;
        }

        //末位去零
        if (strRst.substring(strRst.length() - 1, strRst.length()).equals("零"))
            strRst = strRst.substring(0, strRst.length() - 1);
        return strRst;
    }
    public static void main(String[] args)
    {
        String   rmb;
        double   str;
        System.out.println("请输入金额数：");
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
```

```
            str = scanner.nextDouble();
            System.out.println("转换后的金额为：");

            rmb=RMB.toBigAmt(str);
            System.out.println(rmb);
        }
    }
```

输出结果：

运行程序，结果如图 13-6 所示。

图 13-6　程序输出结果

13.1.5　数字排列

考题题干：

用 1、2、2、3、4、5 这六个数字，写一个方法，打印出所有不同的排列，如 512234、412345 等，要求："4" 不能在第三位，"3" 与 "5" 不能相连。

考题分析：

（1）把问题归结为图结构的遍历问题。实际上 6 个数字就是六个结点，把六个结点连接成无向连通图，对于每一个结点求这个图形的遍历路径，所有结点的遍历路径就是最后对这 6 个数字的排列组合结果集。

（2）显然这个结果集还未达到题目的要求。从以下几个方面考虑：

- 3 与 5 不能相连：实际要求这个连通图的结点 3 与 5 之间不能连通，可在构造图结构时就满足改条件，然后再遍历图。
- 不能有重复：考虑到有两个 2，明显会存在重复结果，可以把结果集放在 TreeSet 中过滤重复结果。
- 4 不能在第三位：仍旧在结果集中去除满足此条件的结果。

参考代码：

```
import java.util.Iterator;
import java.util.TreeSet;

public class shuzi1
{
    private String[] b = new String[]{"1", "2", "2", "3", "4", "5"};
    private int n = b.length;
    private boolean[] visited = new boolean[n];

    private int[][] a = new int[n][n];
    private String result = "";
```

```
    private TreeSet TreeSet = new TreeSet();

    public static void main(String[] args)
    {
        new shuzi1().start();
    }

    private void start()
    {
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            for (int j = 0; j < n; j++)
            {
                if (i == j)
                {
                    a[i][j] = 0;
                }
                else
                {
                    a[i][j] = 1;
                }
            }
        }
        a[3][5] = 0;
        a[5][3] = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            this.depthFirstSearch(i);
        }
        Iterator it = TreeSet.iterator();
        while (it.hasNext())
        {
            String string = (String) it.next();

            if (string.indexOf("4") != 2)
            {
                System.out.println(string);
            }
        }
    }
    private void depthFirstSearch(int startIndex)
    {
        visited[startIndex] = true;
        result = result + b[startIndex];
        if (result.length() == n)
        {
            TreeSet .add(result);
        }
        for(int j = 0; j < n; j++)
        {
            if (a[startIndex][j] == 1 && visited[j] == false)
            {
                depthFirstSearch(j);
            }
            else
```

```
                {
                    continue;
                }
            }
            result = result.substring(0, result.length() -1);
            visited[startIndex] = false;
        }
    }
```

运行结果

运行程序，结果如图 13-7 所示。

图 13-7　程序输出结果

13.1.6　数字拆解

考题题干：

将任一个数字进行拆解，最大数不超过 2，例如：

3 = 2+1=1+2 = 1+1+1，　共 3 种拆法。

4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 =1+2+1= 1 + 1 + 1 + 1，　共 5 种拆法。

5=2+2+1=2+1+2=2+1+1+1=1+2+2=1+2+1+1=1+1+2+1=1+1+1+2=1+1+1+1+1，共 8 种拆法。

随便给一个数字，对其进行拆解，并打印可拆解情况和拆解结果数。

考题分析：

假设已成功拆出有加数为 m 个的，现在考虑拆出 m+1 个的情况，即是可以看成是把已经成功拆出的 m 个中的某一个拆成两个，且如果这 m 个中有存在至少两个相等，只需要拆出其中一个为两个就行了。直到到最后的 n 个加数，对于把一个数拆成两个数的方式，这个很简单。这个方案也应该是可行的。

这个可以用一个递归来实现，对于任意的整数 n,记拆解方式为 g,且做以下假设：

- 最后一个拆数是 1，则拆解方式为 g(n-1) + 1，这个+1 表示在 g(n-1)的末尾加上一个 1
- 最后一个拆数是 2，则拆解方式为 g(n-2) + 2，依此类推，直到最后一个拆解数为 n-1。

参考代码：

```
import java.io.*;
import java.util.Scanner;

class upstair
{
    static int sum(int a[])
    {
```

```
            int sum=0;
             for(int i=1;i<a.length;i++)
                   sum+=a[i];
            return sum;
       }

       static void up(int n)
    {
            int a[]=new int[n+1];
             int count=0;
             int i,k;
             a[0]=-2;
             for(i=1;i<n+1;i++)
                   a[i]=1;
             k=n;
             while(a[k]!=-1){
                   if(sum(a)<n)    k++;
                   if(sum(a)==n){
                      for(i=1;i<=k;i++)
                            System.out.print(a[i]+" ");
                         System.out.println();
                         count++;
                      a[k]=0;
                      while(a[--k]==2)
                             a[k]=0;
                   }
                   a[k]++;
            }
            System.out.println(n+"的拆分方法共有:"+count+"种。");
       }
    public static void main(String argc[])
    {
             int n;
            Scanner input=new Scanner(System.in);
             System.out.println("请输入数字：");
             n=input.nextInt();
             up(n);
         }
    }
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-8 所示。

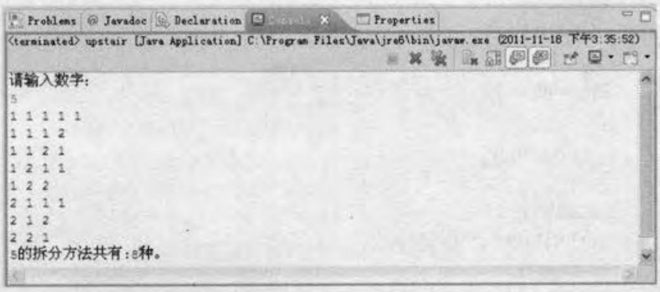


图 13-8　程序输出结果

13.1.7 数字组合

考题题干：

将 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字分成三个百位数，每个数字用且只用一次，并且第三个数字是第一个的 3 倍，第二个数字是第一个的 2 倍。求三个数。说明，结果可能多于一组，如 327、654、981。

考题分析：

第一个数百位数最大为 3，可谓一层循环，十位和各位则组成两层循环。用一个 Set 容器来存储第一个三位数，利用第一个数求出第三个数（3 倍第一个数），把第三个数的每一位求出，看是否符合，如符合则加入 set 容器，而这时只剩下三个数，对这三个数的六种情况求解，等于第一个数的两倍即成立。

参考代码：

```
import java.util.HashSet;
import java.util.Iterator;
import java.util.Set;

public class test39
{
    public static void main(String[] args)
    {
        int i,j,k,m,n,t1,t2,t3;
        Set total=new HashSet();
        for(int t=1;t<10;t++)
        {
            total.add(t);
        }
        Set set=new HashSet();
        Set lastThree=new HashSet();
        for(i=1;i<4;i++)
        {
            set.add(i);
            for(j=1;j<10;j++)
            {
                if(j==i)
                {
                    continue;
                }
                set.add(j);
                for(k=1;k<10;k++)
                {
                    if(k==i||k==j)
                    {
                        continue;
                    }
                    set.add(k);
                    m=3*(i*100+j*10+k);
                    if(m>987)
                    {
                        set.remove(k);continue;
                    }//如果已超出范围，没必要再往下判断
```

```
t1=m%10; if(t1==0)
{
    set.remove(k);
    continue;
} //个位数
t2=(m%100)/10;
if(t2==0)
{
    set.remove(k);
    continue;
} //十位数
t3=m/100;
if(t3==0)
{
    set.remove(k);
    continue;
} //百位数
if(set.contains(t1))
{
    set.remove(k);
    continue;
}
set.add(t1);
if(set.contains(t2))
{
    set.remove(k);
    set.remove(t1);
    continue;
}
set.add(t2);
if(set.contains(t3))
{
    set.remove(k);
    set.remove(t1);
    set.remove(t2);
    continue;
}
set.add(t3);

total.removeAll(total);
for(int q=1;q<10;q++)
{
    total.add(q);
}
total.removeAll(set);
int[] s=new int[3];
Iterator iterator=total.iterator();
int p=0;
while(iterator.hasNext())
{
    s[p]=Integer.parseInt(iterator.next()+"");
    p++;
}
n=s[0]*100+s[1]*10+s[2];
if(n==2*(i*100+j*10+k))
```

```
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        n=s[0]*100+s[2]*10+s[1];
                        if(n==2*(i*100+j*10+k))
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        n=s[1]*100+s[0]*10+s[2];
                        if(n==2*(i*100+j*10+k))
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        n=s[1]*100+s[2]*10+s[0];
                        if(n==2*(i*100+j*10+k))
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        n=s[2]*100+s[0]*10+s[1];
                        if(n==2*(i*100+j*10+k))
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        n=s[2]*100+s[1]*10+s[0];
                        if(n==2*(i*100+j*10+k))
                        {
                            System.out.println(i+""+j+""+k+"    "+n+"    "+m);
                        }
                        set.remove(t1);
                        set.remove(t2);
                        set.remove(t3);
                        set.remove(k);
                    }
                    set.remove(j);
                }
                set.remove(i);
            }
        }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-9 所示。

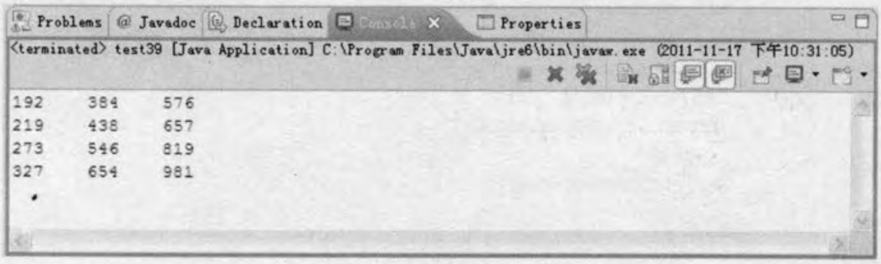


图 13-9　程序输出结果

13.2　思维扩展算法

思维扩展算法是指根据题目的描述，找到解决问题的计算模型，然后设计算法。这类题目的关键是知道正确的编程模型。主要包括：蛇形打印、24 点游戏、掷骰子等。

13.2.1　蛇形打印

考题题干：

打印出蛇形图案，如图 13-10 所示。

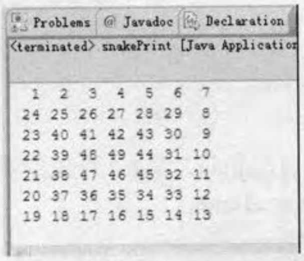


图 13-10　蛇形图片

考题分析：

根据图案效果，可以考虑用二维数组，控制输出的关键在于方向变化地方，行列长度结合初始化的值变化，由外而内，逐个赋值，最后循环输出二维数组。

参考代码：

```
class snakePrint
{
    static int length = 8;
    static int value = 1;
    static int[][] snake = new int[length][length];
    static Direction lastDirection = Direction.Right;

static enum Direction
{
        Right, Down, Left, Up;
    }

public static void initialArray()
{
        int row = 0, col = 0;
        for (int c = 0; c < length * length; c++) {
            snake[row][col] = value;
            lastDirection = findDirection(row, col);
            switch (lastDirection) {
                case Right:
                    col++;
                    break;
                case Down:
                    row++;
                    break;
```

```
                case Left:
                    col--;
                    break;
                case Up:
                    row--;
                    break;
                default:
                    System.out.println("error");
            }
            value++;
        }
    }

static Direction findDirection(int row, int col)
{
        Direction direction = lastDirection;
        switch (direction) {
            case Right: {
                if ((col == length - 1) || (snake[row][col + 1] != 0))
                    direction = direction.Down;
                break;
            }
            case Down: {
                if ((row == length - 1) || (snake[row + 1][col] != 0))
                    direction = direction.Left;
                break;
            }
            case Left: {
                if ((col == 0) || (snake[row][col - 1] != 0))
                    direction = direction.Up;
                break;
            }
            case Up: {
                if (snake[row - 1][col] != 0)
                    direction = direction.Right;
                break;
            }
        }
        return direction;
    }

public static void main(String[] args)
{
        initialArray();
        for (int i = 0; i < length; i++)
        {
            for (int j = 0; j < length; j++)
            {
                System.out.printf(" %2d",snake[i][j]);
            }
            System.out.println();
        }
    }
}
```

输出结果：

运行程序，输出结果如图 13-11 所示。

图 13-11　程序输出结果

13.2.2　24 点算法

考题题干：

随机给 4 个数字，对其进行加减乘除四则运算，最终值为 24，并打印出数学表达式。

考题分析：

基本原理是穷举 4 个整数所有可能的表达式，然后对表达式求值。

表达式的定义：expression = (expression|number) operator (expression|number)。

因为能使用的 4 种运算符 + - * / 都是二元运算符，所以本文中只考虑二元运算符。二元运算符接收两个参数，输出计算结果，并参与后续的计算。

由上所述，构造所有可能的表达式的算法如下：

（1）将 4 个整数放入数组中。

（2）在数组中取两个数字的排列，共有 P（4,2）种排列。对每一个排列。

（2-1）对 + - * / 每一个运算符，

（2-1-1）根据此排列的两个数字和运算符，计算结果

（2-1-2）改表数组：将此排列的两个数字从数组中去除掉，将步骤 2-1-1 计算的结果放入数组中

（2-1-3）对新的数组，重复步骤（2）

（2-1-4）恢复数组：将此排列的两个数字加入数组中，将步骤 2-1-1 计算的结果从数组中去除掉

可见这是一个递归过程。步骤（2）就是递归函数。当数组中只剩下一个数字的时候，这就是表达式的最终结果，此时递归结束。

在程序中，一定要注意递归的现场保护和恢复，也就是递归调用之前与之后，现场状态应该保持一致。在上述算法中，递归现场就是指数组，步骤 2-1-2 改变数组以进行下一层递归调用，步骤 2-1-3 则恢复数组，以确保当前递归调用获得下一个正确的排列。

括号 () 的作用只是改变运算符的优先级，也就是运算符的计算顺序。所以在以上算法中，无需考虑括号。括号只是在输出时需加以考虑。

参考代码：

```
import java.util.*;

class Expression
{
    private ArrayList<Integer> num=new ArrayList<Integer>();
```

```
    private ArrayList<String> sign=new ArrayList<String>();

    public void add(int num2)
    {
        num.add(num2);
    }
    public void add(String sign2)
    {
        sign.add(sign2);
    }
    private int getPriority(String sign)
    {
        if (sign.equals("+")) return 1;
        if (sign.equals("-")) return 1;
        if (sign.equals("*")) return 2;
        if (sign.equals("/")) return 2;
        return -1;
    }

    private String toString(int layer)
    {
        if (layer==0)
        {
            return num.get(0)+sign.get(0)+num.get(1);
        }
        else
        {
            String result=this.toString(layer-1);
            if (getPriority(sign.get(layer))>getPriority(sign.get(layer-1)))
                result="("+result+")";
            result+=sign.get(layer)+num.get(layer+1);
            return result;
        }
    }

    public String toString()
    {
        return toString(2);
    }

    public void clear()
    {
        num.clear();
        sign.clear();
    }
}

class Thinker
{
    private Expression exp;

    public Thinker(Expression expression)
    {
        exp=expression;
    }
```

```
public boolean count(ArrayList<Integer> array,int num,int target)
{
    if (num==1)
    {
        if ((array.get(0)+array.get(1))==target)
        {
            exp.add(array.get(0));
            exp.add(array.get(1));
            exp.add("+");
            return true;
        }
        if ((array.get(0)-array.get(1))==target)
        {
            exp.add(array.get(0));
            exp.add(array.get(1));
            exp.add("-");
            return true;
        }
        if ((array.get(1)-array.get(0))==target)
        {
            exp.add(array.get(1));
            exp.add(array.get(0));
            exp.add("-");
            return true;
        }
        if ((array.get(0)*array.get(1))==target)
        {
            exp.add(array.get(0));
            exp.add(array.get(1));
            exp.add("*");
            return true;
        }
        if ((array.get(0)*target==array.get(1)))
        {
            exp.add(array.get(1));
            exp.add(array.get(0));
            exp.add("/");
            return true;
        }
        if ((array.get(1)*target==array.get(0)))
        {
            exp.add(array.get(0));
            exp.add(array.get(1));
            exp.add("/");
            return true;
        }
        return false;
    }
    else
    {
        for (int current=0;current<array.size();current++)
        {
            ArrayList<Integer> array1=new ArrayList<Integer>();
            int currentNum=array.get(current);
```

```
                for (int i=0;i<array.size();i++)
                if (i!=current) array1.add(array.get(i));
                if (count(array1,num-1,target-currentNum))
                {
                    exp.add("+");
                    exp.add(currentNum);
                    if (num==3)
                    {
                        System.out.println(exp.toString());
                        exp.clear();
                    }
                    if (num!=3) return true;
                }
                if (count(array1,num-1,target+currentNum))
                {
                    exp.add("-");
                    exp.add(currentNum);
                    if (num==3)
                    {
                        System.out.println(exp.toString());
                        exp.clear();
                    }
                    if (num!=3) return true;
                }
                if (count(array1,num-1,target*currentNum))
                {
                    exp.add("/");
                    exp.add(currentNum);
                    if (num==3)
                    {
                        System.out.println(exp.toString());
                        exp.clear();
                    }
                    if (num!=3) return true;
                }
                if (target%currentNum==0)
                {
                    if (count(array1,num-1,(int)(target/currentNum)))
                    {
                        exp.add("*");
                        exp.add(currentNum);
                        if (num==3)
                            {
                            System.out.println(exp.toString());
                            exp.clear();
                        }
                        if (num!=3) return true;
                    }
                }
            }
            return false;
        }
    }
}
```

```
public class ersi2
{
    public static void main(String[] args)
{
        // TODO Auto-generated method stub
        Expression expression=new Expression();
        Thinker thinker=new Thinker(expression);
        ArrayList<Integer> card=new ArrayList<Integer>();
        int target=24;

        Scanner input=new Scanner(System.in);
        System.out.println("请输入 4 个数字：");
        int t;
        for(int i=0;i<4;i++)
        {
            t=input.nextInt();
            card.add(t);
        }
        thinker.count(card,card.size()-1,target);
    }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-12 所示。

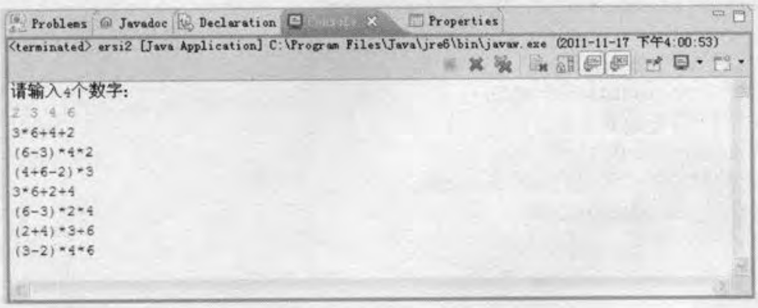


图 13-12　程序输出结果

13.2.3　双色球随机摇号

考题题干：

根据福利彩票双色球玩法规则，6 个蓝色球，范围 1~32，不允许重复，1 个红色球，范围 1~16，自动生成 6 个蓝色球，1 个红色球。

考题分析

双色球自动生成 7 个号码，蓝色球和红色球分别生成，其中 6 个蓝色球要求不允许重复，可以考虑直接用 set 来实现，还可以先把不重复的数字先存放到数组中，然后循环从数组中取数，取一次调整一下数组，实现每次取值不重复。

参考代码：

```
import java.util.Arrays;
import java.util.Random;
import java.util.Scanner;
```

```
public class caipiao1
{
    /**
     * 根据给定的最小数字和最大数字，以及随机数的个数，产生指定的不重复的数组
     * @param begin  最小数字（包含该数）
     * @param end  最大数字（不包含该数）
     * @param size  指定产生随机数的个数
     */
    public static int[] generateRandomNumber(int begin, int end, int size) {
        // 加入逻辑判断，确保 begin<end 并且 size 不能大于该表示范围
        if (begin >= end || (end - begin) < size)
        {
            return null;
        }
        //可以随意生成，但不能重复
        int[] seed = new int[end - begin];

        for (int i = begin; i < end; i ++)
        {
            seed[i - begin] = i;
        }
        int[] ranArr = new int[size];
        Random ran = new Random();
        // 数量可以自己定义
        for (int i = 0; i < size; i++)
        {
            // 得到一个位置
            int j = ran.nextInt(seed.length - i);
            // 得到那个位置的数值
            ranArr[i] = seed[j];
            // 将最后一个未用的数字放到这里
            seed[j] = seed[seed.length - 1 - i];
        }
        return ranArr;
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        int[] ranArr={};
        int red;
        Scanner input=new Scanner(System.in);
        Random ran = new Random();

        System.out.println("欢迎使用双色球自动摇号系统");
        System.out.print("确实摇号(y/n)?");
        String go;
        go=input.next();

        while(go.equalsIgnoreCase("y")){
            ranArr= generateRandomNumber(1,33,6);
            red=ran.nextInt(16);
            System.out.println(Arrays.toString(ranArr)+" "+red);
            System.out.print("继续摇号(y/n)?");
            go=input.next();
        }
```

```
            System.out.println("谢谢使用！");
        }

    }

    import java.util.Arrays;
    import java.util.HashSet;
    import java.util.Iterator;
    import java.util.Random;
    import java.util.Scanner;
    import java.util.Set;

    public class caipiao2
    {
        /**
         * 根据给定的最小数字和最大数字，以及随机数的个数，产生指定的不重复的数组
         *
         * @param begin
         *              最小数字（包含该数）
         * @param end
         *              最大数字（不包含该数）
         * @param size
         *              指定产生随机数的个数
         */
        public static int[] generateBySet1(int begin, int end, int size)
        {
            // 加入逻辑判断，确保 begin<end 并且 size 不能大于该表示范围
            if (begin >= end || (end - begin) < size)
            {
                return null;
            }

            Random ran = new Random();
            Set<Integer> set = new HashSet<Integer>();
            while (set.size() < size)
            {
                set.add(begin + ran.nextInt(end - begin));
            }

            int[] ranArr = new int[size];
            Iterator it = set.iterator();

            for (int i = 0; i < size; i ++)
            {
                if (!it.hasNext())
                {
                    break;
                }
                ranArr[i] = (Integer) it.next();
            }
            return ranArr;
        }

        public static void main(String[] args)
        {
```

```
            int[] ranArr={};
                int red;
                Scanner input=new Scanner(System.in);
            Random ran = new Random();

            System.out.println("欢迎使用双色球自动摇号系统");
            System.out.print("确实摇号(y/n)?");
            String go;
            go=input.next();

            while(go.equalsIgnoreCase("y"))
            {
                    ranArr= generateBySet1(1,33,6);
                    red=ran.nextInt(16);
                System.out.println(Arrays.toString(ranArr)+" "+red);
                    System.out.print("继续摇号(y/n)?");
                    go=input.next();
            }
            System.out.println("谢谢使用！");
    }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-13 所示。

图 13-13　程序输出结果

13.2.4　巧妙过桥

考题题干：

小明一家过一座桥，过桥的时候是黑夜，所以必须有灯。现在小明过桥要 2 分钟，小明的弟弟要 5 分钟，小明的爸爸要 6 分钟，小明的妈妈要 9 分钟，小明的爷爷要 13 分钟。每次此桥最多可以过两人，而过桥的速度根据过桥最慢者而定，而且灯在点燃后 40 分钟就会熄灭。问小明一家如何过桥时间最短？

试题分析：

原本是个小小的智力题，据说是外企的面试题，在这里用程序来求解。

参考代码：

```
public class bridge
{
```

```
static int index;                                        //过桥临时方案的数组下标
static int size = 64;
static int N = 5;
static int mintime = 40;                                 //最小过桥时间总和，初始值 30
static int[] transit = new int[size];                    //进行下标中转的数组
static int program[] = new int[size];                    //最短时间内过桥的方案
static int time[] = {2, 5, 6, 9, 13};                    //每个人过桥所需要的时间
/*
 * 将人员编号：小明 location[0]，弟弟 location[1]，
 * 爸爸 location[2]，妈妈 location[3]，爷爷 location[4] 每个人的当前位置：0--在桥左边，  1--在桥右边
 */
static int location[] = new int[N];

/*
 * 参数说明：notPass:未过桥人数;usedtime:当前已用时间;Direction:过桥方向,1--向右,0--向左
 */
public static void Find(int notPass, int usedtime, int Direction)
{
    if (notPass == 0)
    {                                                    //所有人已经过桥，更新最少时间及方案
        mintime = usedtime;
        for (int i = 0; i < size && transit[i] >= 0; i++)
        {
            program[i] = transit[i];
        }
    }
    else if (Direction == 1)
    {                                                    //过桥方向向右，从桥左侧选出两人过桥
        for (int i = 0; i < N; i++)
        {
            if (location[i] == 0 && (usedtime + time[i]) < mintime)
            {
                transit[index++] = i;
                location[i] = 1;
                for (int j = 0; j < N; j++)
                {
                    int TmpMax = (time[i] > time[j] ? time[i] : time[j]);
                    if (location[j] == 0 && (usedtime + TmpMax) < mintime)
                    {
                        transit[index++] = j;
                        location[j] = 1;
                        Find((notPass - 2), (usedtime + TmpMax), 0);
                        location[j] = 0;
                        transit[--index] = -1;
                    }
                }
                location[i] = 0;
                transit[--index] = -1;
            }
        }
    }
    else
    { //过桥方向向左，从桥右侧选出一个人回来送灯
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
```

```
                if (location[j] == 1 && usedtime + time[j] < mintime)
                {
                    transit[index++] = j;
                    location[j] = 0;
                    Find(notPass + 1, usedtime + time[j], 1);
                    location[j] = 1;
                    transit[--index] = -1;
                }
            }
        }
    }

    public static void main(String[] args)
    {
     String s1="",s2="",s3="";
        for (int i = 0; i < size; i++)
        {
            program[i] = -1;
            transit[i] = -1;                              //初始方案内容为负值，避免和人员标号冲突
        }
        Find(N, 0, 1);                                    //查找最佳方案
        System.out.println("最短过桥时间为：" + mintime);   //输出最短过桥时间
        System.out.println("最佳过桥组合为：");             //输出最佳过桥组合
        for (int i = 0; i < size && program[i] >= 0; i += 3)
        {
            switch (program[i])
            {
                case 0:
                    s1="小明";
                    break;
                case 1:
                    s1="弟弟";
                    break;
                case 2:
                    s1="爸爸";
                    break;
                case 3:
                    s1="妈妈";
                    break;
                case 4:
                    s1="爷爷";
                    break;
            }
              switch (program[i+1])
            {
                case 0:
                    s2="小明";
                    break;
                case 1:
                    s2="弟弟";
                    break;
                case 2:
                    s2="爸爸";
                    break;
                case 3:
```

```
                s2="妈妈";
                break;
            case 4:
                s2="爷爷";
                break;
        }
        switch (program[i+2])
        {
            case 0:
                s3="小明";
                break;
            case 1:
                s3="弟弟";
                break;
            case 2:
                s3="爸爸";
                break;
            case 3:
                s3="妈妈";
                break;
            case 4:
                s3="爷爷";
                break;
            case -1:
                s3="没人";
                break;
        }
        System.out.println(s1 + "和" + s2+"一道过桥，"+ s3+"再回来");
    }
  }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-14 所示。

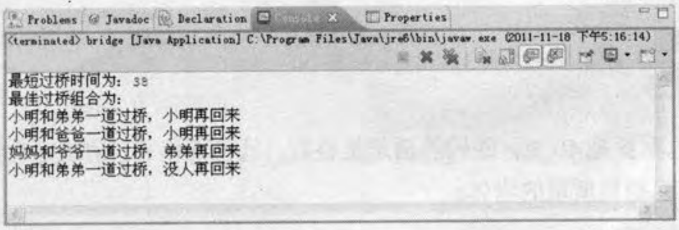


图 13-14　程序输出结果

13.2.5　猴子吃桃

考题题干：

猴子吃桃问题：猴子第一天摘下若干个桃子，当即吃了一半，还不过瘾，又多吃了一个；第二天早上又将剩下的桃子吃掉一半，又多吃了一个。以后每天早上都吃了前一天剩下的一半零一个。到第 10 天早上想再吃时，见只剩下一个桃子了。求第一天共摘了多少。

考题分析：

采取逆向思维的方法，从后往前推断。

参考代码：

```
public class monkey
{
    static int total(int day)
{
        if(day == 10)
        {
        return 1;
        }
        Else
        {
        return (total(day+1)+1)*2;
        }
    }

public static void main(String[] args)
{
        System.out.println(total(1));
}
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-15 所示。

图 13-15　程序输出结果

13.2.6　天平称物

考题题干：

有四个砝码，总重量是 40 克，砝码的质量是整数，且各不相等。请确定它们的质量，使之能称出 1 到 40 克之间任何整数质量的物体。

考题分析：

思路大概如下：

（1）一个砝码重量生成器：生成 4 个砝码各个重量的所有组合。

（2）一个验证程序：验证此砝码组合是否符合标准。

生成从 1 到 40 克的物体重量，每一种物体重量验证一次是否可行。砝码的使用方法只有两种：

- 物体重量=砝码重量；
- 砝码重量[左]+物体重量=砝码重量[右]。

第一种情况的所有组合：从 4 个砝码里面任意选取出 1 个砝码，2 个、3 个，或者 4 个。

依次套用第一种情况公式，有一次成功则符合，否则看第二种情况；

第二种情况的所有组合：从 4 个砝码里面任意取出 1 个砝码，2 个、3 个，或者 4 个，总重量赋给砝码重量[左]；从剩下的 4 个砝码里面任意取出 1 个砝码，2 个、3 个（小于剩余砝码总数），赋给砝码重量[右]，依次套用第二种情况公式，有依次成功则符合，否则不符合，换下一个砝码重量组合。

（3）显示通过验证程序的砝码组合。

参考代码：

```
import    java.util.ArrayList;

public    class    fama2    {
          private    int    count;
          private    ArrayList    A=new    ArrayList();
          private    ArrayList    B=new    ArrayList();
          fama2(int    count)
          {
                if    (count    >    0)
                {
                      this.count    =    count;
                }
          }
          public    void    prtGroup()
          {
                   int    Left,Inserted,temp;
                   Left=count;
                   Inserted=0;
                   temp=Inserted*2+1;
                   int    index=0;
                   int    i;
                   while(Left> 0)
                   {
                          temp=Math.min(temp,Left);
                          A.add(index,new    Integer(temp));
                          for(i=Inserted+1;i <=Inserted+temp;i++)
                          {
                                 if(i <temp)
                                 {
                                        B.add(i-1,new    String(temp+ "-( "+B.get(temp-i-1)+ ") "));
                                 }
                                 else    if(i==temp)
                                 {
                                        B.add(i-1,Integer.toString(temp));
                                 }
                                 else    if(i> temp)
                                 {
                                        B.add(i-1,new    String(temp+ "+( "+B.get(i-temp-1)+ ") "));
                                 }
                          }
                          Inserted=Inserted+temp;
                          Left=Left-temp;
                          temp=Inserted*2+1;
```

```
                    index++;
                }
                for(i=0;i <A.size();i++)
                {
                    System.out.println(A.get(i));
                }
                for(i=0;i <B.size();i++)
                {
                    System.out.println((i+1)+ "= "+B.get(i));
                }
        }
        public    static    void    main(String[]    args)
        {
            int    count=40;
            fama2    PS=new    fama2(count);
            PS.prtGroup();
        }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-16 所示。

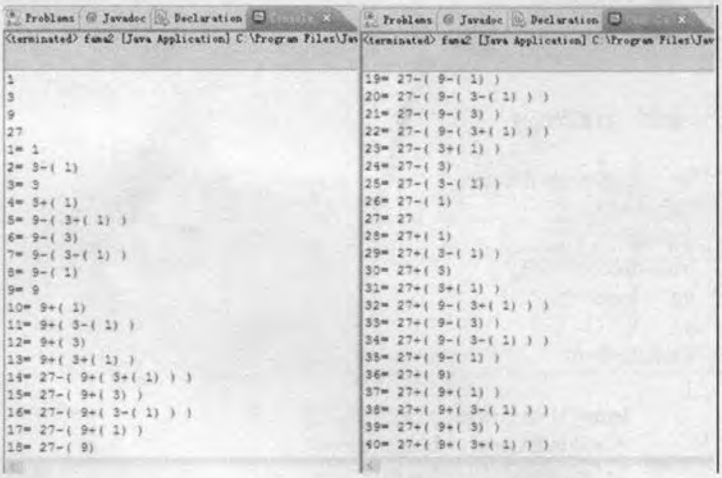


图 13-16　程序输出结果

13.2.7　掷骰子游戏

考题题干：

一个简单的游戏，规则如下：玩家掷两个骰子，点数为 1～6，如果第一次点数和为 7 或 11，则玩家胜；如果点数和为 2、3 或 12，则玩家输；如果和为其他点数，则记录第一次的点数和；然后继续掷骰，直至点数和等于第一次掷出的点数和，则玩家胜；如果在这之前掷出了点数和为 7，则玩家输。请编程实现。

试题分析：

规则看起来有些复杂，但其实只要使用 switch 配合 if 条件判断来编写代码即可，小心不要弄错胜负顺序。

参考代码：

```
import  java.util.ArrayList;
import  java.util.List;
import  java.util.Random;
Import  java.util.Scanner;

class Craps
{
      public static enum Status
      {
          CONTINUE, WON, LOST
      };

      private List<String> results;
      private int w;
      private int l;

      public Craps()
      {
          results = new ArrayList<String>();
          w = 0;
          l = 0;
      }

      public static Random random = new Random();

      private final static int SNAKE_EYES = 2;
      private final static int TREY = 3;
      private final static int SEVEN = 7;
      private final static int YO_LEVEN = 11;
      private final static int BOX_CARS = 12;

     public void play()
     {
          int myPoint = 0;
          Status gameStatus = Status.CONTINUE;
          int sumOfDice = rollDice();

          switch (sumOfDice)
          {
              case SEVEN:
              case YO_LEVEN:
                  gameStatus = Status.WON;
                  break;
              case SNAKE_EYES:
              case TREY:
              case BOX_CARS:
                  gameStatus = Status.LOST;
                  break;
          }

          if(gameStatus == Status.CONTINUE)
          {
              myPoint = sumOfDice;
```

```
            System.out.printf("点数是   %d\n", myPoint);
        }

        while (gameStatus == Status.CONTINUE)
        {
            sumOfDice = rollDice();

            if (sumOfDice == myPoint)
                gameStatus = Status.WON;
            else if (sumOfDice == SEVEN)
                gameStatus = Status.LOST;
        }

        if (gameStatus == Status.WON)
    {
            System.out.println("玩家赢");
            results.add("赢");
            w++;
        }
        else
        {
            System.out.println("玩家输");
            results.add("输");
            l++;
        }
    }

    public int rollDice()
    {
        int die1 = 1 + random.nextInt(6);
        int die2 = 1 + random.nextInt(6);

        int sum = die1 + die2;

        System.out.printf("玩家掷的点数   %d + %d = %d\n", die1, die2, sum);

        return sum;
     }

     public void print() {
        System.out.println("游戏结果统计：");
        System.out.println("赢的次数：   " + w);
        System.out.println("输的次数：   " + l);
        int i = 0;
        for(String rs: results) {
            System.out.println("第   "+(++i)+"次: " +rs);
        }
     }
}

public class CrapsTest
{
     public static void main(String args[])
{
      String answer;
```

```
        Craps game = new Craps();

        do{
        game.play();

        System.out.println("继续游戏吗(y/n)?");
        Scanner input = new Scanner(System.in);
        answer = input.next();
        }while("Y".equalsIgnoreCase(answer));

        game.print();
    }
}
```

运行结果：

运行程序，结果如图 13-17 所示。

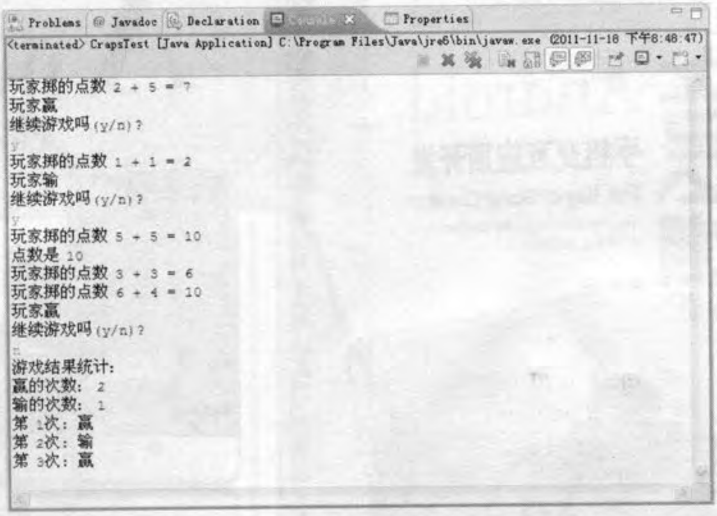


图 13-17　程序输出结果

13.3　小　　结

算法作为面试的一个主要考查内容，在面试中的地位越来越重要。本章详细讲解了常见的基础算法和思维扩展算法。主要包括字符串匹配算法、数字排列算法、天平称物算法、掷骰子算法等。每一种算法都各具特色，读者可以根据个人喜好，有选择地深入研究，提出自己更好的算法，以达到熟练掌握，为面试奠定坚实基础。